التعددية الرياضية

موقف جديد في فلسفة الرياضيات

إعـــداد

د. مريم عبد المسيح يوسف داود

مدرس المنطق وفلسفة العلوم

كلية الآداب - جامعة المنيا

Email: mariam_logic@mu.edu.eg

DOI: 10.21608/aakj.2024.324707.1896

تاريخ الاستلام: ٢٩/ ٩/ ٢٠٢٤م

تاريخ القبول: ٩/ ١٠/ ٢٠٢٤م

ملخص:

تهدف هذه الدراسة إلى تقديم وتحليل موقف جديد في فلسفة الرياضيات، هو ما يُعرف بـ " التعددية الرياضية"، هذا الموقف الفلسفي الذي يعترف ويحتضن العديد من المناهج والأساليب والنظريات الصحيحة في الرياضيات. ويُوضح أن النظريات الرياضية المتنوعة يمكن أن تتعايش بانسجام، حيث تقدم كل منها رؤى قيمة وتساهم في ثراء المعرفة الرياضية. تؤكد التعددية الرياضية على قبول وجهات النظر الرياضية المختلفة والاعتراف بشرعية الممارسات الرياضية المتنوعة، وتسليط الضوء على التنوع والتعدد المتأصل في التفكير والتحقيق الرياضي. وبذلك تتناقض التعددية الرياضية بشكل واضح مع الفلسفات التقليدية للرياضيات التي ساهمت في حدوث الأزمة التأسيسية في الرياضيات، وتم تطويرها كرد فعل لها.

لقد حفزت التعددية الرياضية قدرًا كبيرًا من النقاش والتدقيق داخل فلسفة الرياضيات. من خلال الدعوة إلى تنوع الممارسات والتفسيرات في الرياضيات، تواجه وجهة النظر هذه تحديات وانتقادات فيما يتعلق بتماسكها الداخلي وجوهر ما يشكل الحقيقة الرياضية. فضلًا عن بعض المفارقات المصاحبة لها. غير أنه يمكن القول، إن التحديات والانتقادات التي تواجهها ليست مجرد عقبات لكنها بوابات لرؤية واستكشاف أعمق.

ومن خلال تقديم مساهمات الفلاسفة المبتكرين مثل ميشيل فريند، وجراهام بريست، وستيوارت شابيرو وآخرين تسلط هذه الدراسة الضوء على دوافع التعددية الرياضية ومظاهرها النظرية، والأسس الفلسفية والمنطقية للتعددية الرياضية، كذلك أهم التحديات والانتقادات التي يمكن أن توجه لها. يتناقض هذا التحليل بشكل صارخ مع الصورة المتجانسة للرياضيات باعتبارها تخصصًا ثابتًا وقابل للتطبيق عالميًا، ويقترح بدلاً من ذلك رؤية للرياضيات كمجال من الأطر الصالحة والمتنوعة. ولقد استعان الباحث بالمنهج التحليلي النقدي في دراسته.

الكلمات الرئيسة: فلسفة الرياضيات، الأزمة التأسيسية في الرياضيات، التعددية الرياضية، ميشيل فريند، جراهام بريست.

Mathematical Pluralism

"A New Position in Philosophy of Mathematics"

Abstract:

This study aims to present and analysis a new position in philosophy of mathematics known as "mathematical pluralism", a philosophical position that acknowledges and embraces multiple valid approaches, methods, and theories in mathematics. This perspective recognizes that diverse mathematical frameworks can coexist harmoniously, each offering valuable insights and contributing to the richness of mathematical knowledge. Mathematical pluralism emphasizes the acceptance of different mathematical viewpoints and the recognition of the legitimacy of various mathematical practices, highlighting the diversity and multiplicity inherent in mathematical reasoning and inquiry. Thus, mathematical pluralism stands in stark contrast to the traditional philosophies of mathematics that contributed to the foundational crisis in mathematics and was developed in response to it.

Mathematical pluralism has stimulated considerable discussion and scrutiny within the philosophy of mathematics community. Advocating for a diversity of practices and interpretations in mathematics, this viewpoint encounters critiques regarding its internal consistency and the essence of what constitutes mathematical truth. As well as some of the paradoxes that accompany it. It can be argued, however, that the challenges and critiques are not mere hurdles but portals to deeper insights and exploration.

By presenting the contributions of innovative philosophers such as Michele Friend, Graham Priest, Stewart Shapiro and others, this study sheds light on the motivations and theoretical manifestations of mathematical pluralism,the philosophical and logical foundations of mathematical pluralism, and the main challenges and criticisms that can be levelled against it. This analysis stands in stark contrasts to the monolithic image of mathematics as a fixed and universally applicable discipline and proposes instead a vision of mathematics as a field of valid and diverse frameworks. The researcher used a critical analytical method in his study.

Keywords: Philosophy of Mathematics, Foundation Crisis of Mathematics, Mathematical Pluralism, Michele Friend, Graham Priest.

مقدمة الدراسة:

على مدى العقد الماضي، أصبح الطلب على نظرية موحدة وتأسيسية للرياضيات أكثر أهمية. ويشار إلى هذا باسم "الأزمة التأسيسية في الرياضيات". تقدم هذه الدراسة موقفًا جديدًا في فلسفة الرياضيات، يتحدى فكرة وجود أساس أو منهجية واحدة صحيحة للرياضيات، يُعرف بـ " التعددية الرياضية". وهي موقف فلسفي يعترف بوجود أنظمة أو مناهج تأسيسية متعددة متساوية الصلاحية في الرياضيات. وفقًا للتعددية الرياضية، يمكن أن تكون النظريات أو الأطر الرياضية المختلفة مفيدة لأغراض مختلفة، ولا ينبغي اعتبار أي نظرية واحدة متفوقة أو أكثر جوهرية من غيرها. تشكك التعددية في الحاجة إلى نظرية تأسيسية يمكن أن تشمل جميع الرياضيات، وتنظر في إمكانية وجود نظريات رياضية متعارضة تكون جميعها صحيحة. مما يسمح لعلماء الرياضيات باختيار الأساليب والبديهيات التي تناسب أغراضهم على أفضل وجهه. إنها تشجع استكشاف الأنظمة البديلة، والهياكل الرياضية، والأسس المنطقية، التي تعزيز الإبداع والمرونة في الممارسة الرياضية.

تقوم التعددية على الاقتناع **بأننا لا نملك الأدلة اللازمة للاعتقاد بأن الرياضيات هي مجموعة موحدة من الحقائق، أو يمكن اختزالها في نظرية رياضية واحدة (أساس). إن التعددي هو ببساطة لا أدري في هذه القضية... وفي ضوء هذا الموقف اللأدري تتطور التعددية."** **(Friend, M: 2014, p. 103).** وعلى هذا النحو، يكون التعددي حرًا في الاهتمام بالرياضيات باعتبارها سلسلة من النظريات، حيث تحتوي كل منها على حقائق مرتبطة بتلك النظرية، أو يكون التعددي حرًا في التفكير في الرياضيات باعتبارها عملية، على النقيض من التركيز على الرياضيات باعتبارها مجموعة موحدة من الحقائق. التعددية الرياضية هي وجهة نظر جذابة للغاية لأنها تستوعب إمكانية قبول النظريات المتضاربة دون الاضطرار إلى تقييد أنفسنا بنظرية واحدة. علاوة على ذلك، فهي نظرية تحفز الإبداع الرياضي.

تتناقض التعددية في الرياضيات بشكل صارخ مع الفلسفات التقليدية للرياضيات التي ساهمت في حدوث الأزمة التأسيسية في الرياضيات. في هذه الفلسفات التقليدية، نقترح نظرية رياضية واحدة كأساس للرياضيات بأكملها. مع النضج الفلسفي، تصبح النظرية التأسيسية معيارًا للممارسة الرياضية، أو تهدف إلى وضع معيار للممارسة المستقبلية. تشمل الأمثلة الواقعية، والمنطقية، وبعض إصدارات البنائية، والطبيعية، والشكلية، والخيالية، والبنيوية.

لقد تغير معنى عبارة "الأساس الرياضي" منذ نهاية القرن التاسع عشر. فقد كانت تعني في السابق نظرية عامة متسقة في الرياضيات، مبنية على مبادئ وأفكار أساسية (البديهيات اللاحقة) التي يمكن اختزال بقية الرياضيات إليها. وفي الآونة الأخيرة، أصبحت العبارة تعني " المنظور" الذي يمكننا من خلاله رؤية أو تفسير الكثير من الرياضيات؛ وقد فقدت أهميتها الميتافيزيقية الجوهرية التي تميز الفلسفة الواقعية. وقد تم استبدال الأخير بالتركيز على نظرية المعرفة. ويُظهر الاستخدام الأحدث للعبارة افتقارًا إلى الاهتمام بالوجود المطلق والحقيقة والتفرد، بل وحتى الاتساق في بعض الأحيان. فقط في ظل المفهوم الأكثر حداثة لـ "الأساس" تكون التعددية في الأسس الرياضية ممكنة من الناحية النظرية.

تُقدم التعددية الرياضية وجهة نظر دقيقة تختلف عن تفرد الأسس الرياضية التقليدية. وتقترح أطرًا رياضية مشروعة متعددة أو "أكوانًا" لكل منها بديهيات وحقائق. مثل هذا الموقف يتحدى النظرة المتجانسة للرياضيات باعتبارها مسعى خطيًا ومفردًا، بدلاً من ذلك تقترح مشهدًا تتعايش فيه نظريات رياضية متنوعة. تعكس هذه التعددية قبولًا فلسفيًا أوسع نطاقًا، بأن الرياضيات يمكن أن تجسد مبادئ تأسيسية مختلفة دون الحاجة إلى بنية هرمية أو حصرية، على غرار التنوع والتعدد الملحوظ في المنطق. وهذا الموقف نحو التعددية الرياضية يشعل خطابًا فلسفيًا رائعًا حول طبيعة الرياضيات وهندستها وهدفها. إنه يدفع إلى ما هو أبعد من الحدود المقررة، ويدعو إلى التفكير

العميق في الحقائق الرياضية، وأنطولوجيا الكيانات الرياضية، ومنهجيات بناء النظريات الرياضية والتحقق من صحتها.

إن ظهور التعددية في الخطاب الرياضي يقلب الاعتقاد التقليدي بالحقيقة الرياضية الفريدة التي يمكن الوصول إليها عالميًا، ويدعو بدلاً من ذلك إلى مناهج مختلفة لفهم الرياضيات. هذا المنظور لا ينتقص من صرامة النظام أو دقته ولكنه يوسع نطاقه ويثري تعقيده، مع الاعتراف بأهمية التقاليد الرياضية المتنوعة والتاريخ والأسس الفلسفية. تعزز التعددية رؤية أكثر شمولاً للرياضيات من خلال تبني مجموعة من الأسس الرياضية والاعتراف بالطرق المختلفة لاكتساب المعرفة الرياضية وتطبيقها.

في فلسفة المنطق، لدينا فلسفات تعددية مدروسة جيدًا؛ كما لدينا مناقشات وتبادلات جيدة حول الاختلافات في الموقف. على النقيض من ذلك، في فلسفة الرياضيات، لا يوجد موقف مدروس جيدًا يسمى "التعددية". عندما يتم ذكر موقف التعددية، يتم إدراجه كموقف بين مواقف أخرى[١]. في هذه الدراسة، يتم تقديم التعددية والدفاع عنها كفلسفة جديدة ومستقلة للرياضيات في حد ذاتها. إحدى علامات الاستقلال عن المواقف الفلسفية السائدة هي أن التعددية تستخدم (ما يتم رفضه عادة على أنه) نظريات رياضية "سيئة" لإعلام فلسفتها.

تتعمق ميشيل فريند[٢] (Michele Friend 1966-) في الأسس الفلسفية للتعددية الرياضية، لا سيما من خلال عدسة النظريات التي غالبًا ما توصف بأنها "سيئة bad" داخل المجتمع الرياضي. وتؤكد أن التعددية الرياضية تشمل تنوع النظريات الرياضية، بما في ذلك تلك التي يُنظر إليها تقليديًا بشكل غير مواتٍ unfavorably. وتتوسع فريند في هذا الأمر من خلال تحدي الأحكام المسبقة ضد النظريات الرياضية "السيئة" والدعوة إلى رؤية أكثر شمولاً تعترف بإنتاجية وجود أطر رياضية متعددة، وحتى متضاربة.

يكشف استكشاف المنظورات الرائدة عن حجة قوية لدمج النظريات الرياضية المتنوعة والمتناقضة أحيانًا والاعتراف بها ضمن إطار موحد، وهو ما يمثل تحولًا ملحوظًا بعيدًا عن الوحدانية الرياضية التقليدية. هذه الحركة نحو احتضان التنوع المنطقي وإجراء تحقيق فلسفي أوسع في الرياضيات تمهد الطريق لاستفسارات وتحقيقات جديدة في جوهر هذا النظام وأسسه وتأثيراته الأوسع. يضع هذا النهج فلسفة الرياضيات كمجال غني للاستكشاف المتعمق والتحقق من صحة التعددية الرياضية.

تؤكد التعددية الرياضية على قبول وجهات النظر الرياضية المختلفة والاعتراف بشرعية الممارسات الرياضية المتنوعة، وتسليط الضوء على التنوع والتعدد المتأصل في التفكير والتحقيق الرياضي. والأهم من ذلك، أن هذا القبول والتحقق من وجهات النظر المتعددة يمهد الطريق لاستكشاف كيف يمكن للهياكل المنطقية أن تجسد وتعكس هذه التعددية. إن استكشاف جراهام بريست [٣] (Graham Priest 1948–) للدياليثية Dialethism أو ما تعرف بـ" إزدواجية الصدق والكذب "، وقبول التناقضات الحقيقية، ودراساته حول المفارقات بمثابة أساس نقدي لفهم الأبعاد المنطقية للتعددية الرياضية وتوفير الأساس لفهم الجوانب المنطقية للتعددية الرياضية.

في حين أن بريست Priest قد قدم مساهمات كبيرة في المنطق شبة المتسق Paraconsistent Logic، فإن وجهات نظره المحددة حول التعددية الرياضية لم تتم مناقشتها على نطاق واسع أو ربطها بعمله. ومع ذلك، تجدر الإشارة إلى أن بريست قد كتب على نطاق واسع عن الدياليثية[٤] Dialethism في حين تركز الدياليثية التي يتبناها بريست في المقام الأول على المنطق والميتافيزيقيا، إلا أنها قد تكون لها آثار على التعددية الرياضية.

من خلال القول بأن التناقضات يمكن أن توجد بشكل متماسك داخل نظام منطقي، يعارض بريست Priest السعي التقليدي لأساس رياضي موحد وخالي من التناقض، ويدافع عن منطق تعددي حيث تتعايش أنظمة منطقية متعددة ومتساوية في

انسجام. يقترح هذا النهج الرياضيات كمجموعة نابضة بالحياة من النظريات والأنظمة، التي يتم تحديد كل منها من خلال مجال قابليتها للتطبيق ومجموعة معايير للحقيقة، وبالتالي تتحدى النظرة المتجانسة للرياضيات وتتماشى مع مبادئ التعددية الرياضية.

من خلال تقديم مساهمات الفلاسفة المبتكرين أمثال ميشيل فريند Michele Friend، وجراهام بريست Graham Priest، وستيوارت شابير Stewart Shapiro وآخرين، تسلط هذه الدراسة الضوء على دوافع التعددية الرياضية ومظاهرها النظرية. فضلاً عن الأسس الفلسفية والمنطقية للتعددية الرياضية. إن التعامل مع مساهمات هؤلاء المفكرين يثري خطاب التعددية، ويقدم عدسات جديدة لرؤية علاقة الرياضيات بالطيف الأوسع للتجربة الإنسانية.

لقد حفزت التعددية الرياضية قدرًا كبيرًا من النقاش والتدقيق داخل فلسفة الرياضيات. من خلال الدعوة إلى تنوع الممارسات والتفسيرات في الرياضيات، تواجه وجهة النظر هذه تحديات وانتقادات فيما يتعلق بتماسكها الداخلي وجوهر ما يشكل الحقيقة الرياضية. فضلًا عن بعض المفارقات المصاحبة لها. غير أنه يمكن القول، إن التحديات والانتقادات التي تواجهها ليست مجرد عقبات لكنها بوابات لرؤية واستكشاف أعمق. وسوف يستعين الباحث بالمنهج التحليلي النقدي في دراسته.

مظاهر التعددية الرياضية ودوافعها:

التعددية بشكل عام، حول موضوع معين، يعرفها ستيوارت شابيرو[٥] (١٩٥١– Shapiro) : **أن التعددية، توصف بشكل فضفاض بأنها " الرأي القائل بأن الروايات المختلفة للموضوع صحيحة على قدم المساواة، أو جيدة على قدم المساواة، أو مشروعة على قدم المساواة، أو ربما حتى صحيحة" .(Shapiro, S: 2014, P13)** وتعرفها فريند Friend بأنها: **"موقف فلسفي يتميز بالتسامح تجاه وجهات النظر**

والنظريات والمنهجيات والقيم الأخرى وما إلى ذلك. التسامح ليس عملًا من أعمال اللطف. إنه مدفوع بالشك والصدق. (Friend, M:2019, P.346)

التعددية الرياضية موقف جديد نسبيًا على المشهد الفلسفي فيما يتعلق بالرياضيات. يتحدى فكرة وجود إطار أو نظرية رياضية واحدة متميزة. ويدرك أن هناك العديد من الأنظمة أو الهياكل الرياضية الصالحة التي يمكن استخدامها لوصف وتحليل الكيانات والظواهر الرياضية. يؤكد هذا الموقف على تنوع وثراء النظريات الرياضية، مما يسمح بنهج مختلفة لفهم المفاهيم الرياضية. تتحدي التعددية الرياضية فكرة أن هناك أساس واحد صحيح للرياضيات.. وتأخذ على محمل الجد احتمال وجود العديد من الأسس غير المتسقة معًا للرياضيات(متضاربة في مجموعها). وتدرك أن الأطر الرياضية المختلفة، مثل نظرية المجموعات أو نظرية الفئة أو نظرية النوع، يمكن أن توفر كل منها وجهات نظر صالحة ومفيدة حول الأشياء والهياكل الرياضية. **(Friend, M:2014, P.24)**

السمة الميزة للشخص التعددي هو أنه يُظهر تسامحًا تجاه المناهج المختلفة في الرياضيات فيما يتعلق بنظرية المعرفة، والأسس، والمنهجية، والموضوعية، والحقيقة. إنه متشكك من حيث المبدأ. إن المتشكك المبدئي (المتشكك صاحب المبادئ) A principled Sceptic ليس مجرد شخص يشك بسبب العادة أو العناد. بل هو شخص تم دفعه إلى الشك في ضوء: (١) معرفته بالعديد من نظريات المعرفة، وما إلى ذلك في الممارسة الرياضية، و(٢) افتقاره إلى اقتناع قوي بأن "إحدى هذه النظريات "(واحدة بعينها من هذه النظريات) صحيحة. (Friend, M:2019, P.346) من وجهة نظر فريند أن التعددية ليست مجرد موقف واحد في فلسفة الرياضيات، إنها عائلة من المواقف. هذا هو أحد الأسباب التي تدفعها إلى أن تطلق عليها " برنامجًا" Programme".

إن الطريقة المضيئة لفهم التعددية الرياضية المعاصرة هي أن نرى كيف حدث ذلك. يعتقد **بريست Priest** أن التعددية الرياضية قد نشأت بشكل طبيعي نتيجة الدراسات في ما يسمى بأسس الرياضيات والمشاكل التي كشفها ذلك في محاولة العثور على مثل هذا الأساس. إن التحقيقات في مجال أسس الرياضيات هي التي اوصلت وجهة النظر الى نقطة الانهيار..." (Priest, G:2024, P.4-5)

إن التعددية مضادة للتأسيسية. وفي هذا الصدد، تتعارض التعددية مع أغلب الفلسفات التقليدية للرياضيات، والتي تسعى إلى تقديم فلسفة موحدة لكل الرياضيات، حيث تتضح الوحدة من خلال الاختزال إلى أساس[٦]. وكما تصف فيلسوفة الرياضيات بينيلوبي مادي (Maddy Penelope:1950–) [٧] التي تحظى باحترام كبير– هذه اللحظة في تاريخ الرياضيات وفلسفتها: أصبح الرأي القائل بوجود مثل هذه الوحدة في الرياضيات أمرًا تقليديًا".

يعد البحث عن نظرية تأسيسية للرياضيات موضوعًا أساسيًا في فلسفة الرياضيات. وجهة النظر التأسيسية هي أن الرياضيات يمكن اختزالها في نظرية تأسيسية واحدة. ستكون النظرية التأسيسية هي جوهر الرياضيات وستساعدنا على فهم الرياضيات بعمق أكبر. كما أنها تمنحنا إمكانية تطبيق النظريات والأدوات الرياضية من فرع من فروع الرياضيات إلى فرع آخر. كذلك يمكن استخدامها بشكل معياري للتمييز واستبعاد الرياضيات التي لا يمكن اختزالها إلى الأساس. وبعبارة أخرى، فإنها ستضع قواعد الرياضيات على أرض مستقرة، خالية من الارتباك والتناقض. علاوة على ذلك، فإنها ستحسم مسألة أنطولوجيا الرياضيات التي شغلت عقول الفلاسفة وعلماء الرياضيات منذ آلاف السنين. كان هذا هو الطموح الذي بدأ البحث عن نظرية تأسيسية للرياضيات في بداية القرن التاسع عشر.

يعتقد الكثيرون أن البحث قد انتهى مع اكتشاف نظرية المجموعات. ومع ذلك، فقد أدت المفارقات والنتائج الاستقلالية في نظرية المجموعة إلى تحطيم الأمل في وضع الرياضيات على أرض صلبة. لا تزال المناقشات جارية حول البديهيات التي يجب تضمينها لبناء عالم نظري قوي بما يكفي ليشمل جميع الرياضيات ولكن في نفس الوقت لا ينتج عنه مفارقات وتناقضات. لقد تنبأوا نيكولاس بورباكي[٨] Bourbaki بمصير أسس الرياضيات، في مقدمة المجلد الأول "نظرية المجموعات" من كتاب" عناصر الرياضيات، فكتبوا:

"إننا نعلم الآن أنه من الممكن منطقيًا أن نستمد كل الرياضيات الحالية تقريبًا من مصدر واحد، ألا وهو نظرية المجموعات. ولا ندعي بذلك أننا نكتب قانونًا ثابتًا؛ فربما يأتي يوم يتوصل فيه علماء الرياضيات إلى استدلال مختلف لا يمكن صياغته صوريًا باللغة التي نعتمدها هنا،.... وفي هذه الحالة يتعين علينا، إن لم يكن الأمر كذلك، أن نغير اللغة تمامًا، أو على الأقل أن نوسع من بناء الجملة. ومستقبل الرياضيات هو الذي سيقرر هذا."(2004, p.9)

دخلت التعددية النقاش بفكرة جديدة مثيرة للجدل؛ لا توجد نظرية تأسيسية واحدة للرياضيات. تعترف التعددية بوجود أنظمة أو مناهج تأسيسية متعددة متساوية الصلاحية في الرياضيات. إنها تتحدى فكرة وجود أساس أو منهجية واحدة صحيحة للرياضيات. وفقا للتعددية الرياضية، يمكن أن تكون النظريات أو الأطر الرياضية المختلفة مفيدة لأغراض مختلفة، ولا ينبغي اعتبار أي نظرية واحدة متفوقة أو أكثر جوهرية من غيرها. وبذلك، تشكك التعددية في الحاجة إلى نظرية تأسيسية يمكن أن تشمل جميع الرياضيات، وتنظر في إمكانية وجود نظريات رياضية متعارضة تكون جميعها صادقة. وهذا يدعو إلى التفكير الفلسفي في طبيعة المعرفة الرياضية والعلاقة بين الأنظمة الصورية والبرهان والحقيقة الرياضية.

في قلب التعددية الرياضية يوجد الاعتراف بالتعايش وشرعية الأسس الرياضية المتعددة، يتضح ذلك بوضوح من خلال فحص الأنظمة الأساسية مثل نظرية المجموعات ونظرية الفئة. تجسد هذه الأنظمة، بعدساتها ومنهجياتها الفريدة لفك رموز وبناء المفاهيم الرياضية، الروح التعددية للممارسة الرياضية. وعلى حد تعبير **فريند** " **فإن التوتر بين الأسس المختلفة هو الذي يحفز التطورات الجديدة في الرياضيات. يمكن أن يسمى هذا التوتر "التناقض المثمر".**

إن نظرية المجموعات Set theory، التي قدمها جورج كانتور (١٨٤٥-١٩١٨ Georg Cantor)، مع تنوع النظريات المتنافسة مثل زيرميلو- فرانكل (ZF Zermelo-Fraenkel) وفون نيومان-بيرنايز-جودل Von Neumann–Bernays–Gödel (NBG)، تجسد التنوع الأساسي في الرياضيات. إن نتائج الاستقلال، مثل نظريات عدم الاكتمال لجودل Gödel's Incompleteness واستقلال فرضية الاستمرارية (CH) Continuum Hypothesis's عن بديهيات زير ميلو- فرانكل ZFC مع بديهية الاختيار (Axiom of Choice)، تسلط الضوء على القيود المفروضة على أي نظام تأسيسي واحد، مما يشير إلى ضرورة وجود نهج تعددي. ومع ذلك، فإن استكشاف نظريات المجموعات المختلفة، يوضح التعددية ضمن هذا النهج التأسيسي.

توضح **فريند Friend** أن أسس الرياضيات، وتحديدًا نظرية المجموعات، تخضع للتفسير والتوسيع والنقاش، مما يدعم الرؤية التعددية لعلم الرياضيات. وهي توضح هذا التحول من خلال دراسة الاختلاف والآثار المترتبة على نظرية مجموعات زيرميلو-فرانكل من الدرجة الأولى (ZF1) مقابل نظرية مجموعة زيرميلو- فرانكل من الدرجة الثاني (ZF2)، وامتدادات كل منهما. فتقول: "**هناك نظريات مجموعات متنافسة، ولكن حتى "ZF" غامضة... بين ZF1 وZF2 و ZFC1 وZFC2، وهي نظريات شكلية مختلفة.**" إن هذا الاعتراف بالنظريات المتعددة القابلة للتطبيق ضمن

نظرية المجموعات نفسها يتحدى فكرة الأساس الرياضي الأحادي، مما يمهد الطريق لقبول تعددي للمناهج التأسيسية المتنوعة. وتزعم أن:

"إذا كنا مصممين على أن نكون مؤسسيين أحاديين، فعلينا أن نزيل الغموض، ونختار أساسًا فريدًا، ونكون على صواب. إن الشخص الذي يشكك في أنه من الممكن دائمًا، أو حتى من المرغوب فيه، إزالة الغموض وتحديد أساس واحد تمامًا ومنح دور معياري في الرياضيات، هو في طريقه إلى أن يصبح أكثر تعددية" (Friend,M:2014, P.61)

إن الشكوك تجاه جدوى وصواب التأسيسية الأحادية تحلل تبني وجهة نظر أكثر تعددية. إذا قبل المرء أن الرياضيات لا يمكن، أو لا ينبغي، أن تقتصر على نظرية أساسية واحدة، فإن هذا القبول يوسع نطاق الممارسات والنظريات الرياضية المشروعة. إن هذا الاعتراف بأسس صحيحة متعددة، لكل منها مزايا وتطبيقات، هو بمثابة نقطة انطلاق نحو التعددية.

تزعم فريند Friend إن الأزمة في أسس الرياضيات هي أزمة مفاهيمية. وتقترح أن نتقبل الأزمة ونتخذ موقفاً تعددياً تجاه الأسس. فتقول: **"هناك العديد من الأسس في الرياضيات. ومع ذلك، فإن عبارة "أساسات كثيرة" (لمبنى واحد) هي عبارة عن تناقض لفظي. ولذلك، فإننا نحول المفردات لنقول إن الرياضيات، باعتبارها تخصصًا واحدًا، تتكون من العديد من النظريات المختلفة. وهذا يعني أنه لا توجد حقائق رياضية مطلقة، بل هناك حقائق فقط ضمن النظرية. لا يوجد أنطولوجيا موحدة ومتسقة، فقط أنطولوجيا داخل النظرية."(Friend, M: 2013a, P.27)** وفقًا لـ فريند تعلمنا الأزمات المفاهيمية أن هناك عدم استقرار في تصوراتنا المسبقة أو نظرياتنا أو في أهدافنا الفلسفية. إن الأزمة في أسس الرياضيات شيء يمكن أن نندم عليه، أو شيء يمكن أن نتعلم منه. ما تعلمته وآخرون هو التخلي عن هدف تقديم نظرية رياضية رسمية واحدة كأساس للرياضيات بأكملها.

أحد الدوافع الرئيسة وراء التعددية الرياضية هو الاعتراف بأن الأنظمة الرياضية المختلفة قد يكون لها نقاط قوة وقيود متميزة. قد تتفوق بعض الأنظمة في التقاط جوانب معينة في الرياضيات، في حين أن البعض الآخر قد يوفر وجهات نظر أو رؤى بديلة. من خلال استكشاف ودراسة هذه الأطر الرياضية المتنوعة، يمكن لعلماء الرياضيات والفلاسفة الحصول على فهم أكثر شمولًا للرياضيات ككل.

أحد التعبيرات البارزة عن هذا الموقف في القرن العشرين يرجع إلى هيلاري بوتنام (١٩٢٦-٢٠١٦) Hilary Putnam. فقد درس كتابه " رياضيات بلا أساس" النهجين النظريين للمجموعات والأنماط لتأسيس الرياضيات، وخلص إلى أنهما يقدمان تفسيرات تكميلية وقابلة للتوفيق، فيذكر:

" حتى لو كانت صورة المنطق النمطي في بعض السياقات أكثر إفادة من صور الأشياء الرياضية، فإن العكس هو الصحيح في سياقات أخرى. ... إن النظر إلى الأشياء من وجهة نظر العديد من "الأوصاف المتكافئة" المختلفة، مع مراعاة ما تشير إليه جميع الصور، يُعد ترياقًا صحيًا للنزعة التأسيسية وذو قيمة إرشادية حقيقية في دراسة الأسئلة العلمية من الدرجة الأولى. دع ألف زهرة تتفتح! (Putnam,H:1967, p. 19-20)

إن ما سمح لـ " بوتنام " بأن يكون غير مبالٍ بالأسس هو إيمانه بواقعية الرياضيات. فالكيانات الرياضية متشابكة بقوة مع المشروع العلمي، إلى الحد الذي يجعل من غير المنطقي، وفقًا لبوتنام، أن نعتبرها أقل واقعية من كيانات مثل الإلكترونات أو الماء. وإذا كنا نعتقد، مثل بوتنام، أن المشروع العلمي هو أكثر تفاعلاتنا نجاحًا مع الواقع، فقد يكون من الأفضل أن نؤيد الكيانات الرياضية والفيزيائية (الملموسة والمجردة على حد سواء) بالجملة. بوجود مثل هذه الثقة في واقع الرياضيات، فيمكننا أن نظهر بعض التساهل عندما يتعلق الأمر بوصفها التأسيسي (Wanger, R: 2019, p381-396)

وقد عبر لودفيج فيتجنشتاين (Ludwig Wittgenstein 1889-1930) عن نهج تعددي آخر. فقد كان قلقه أن ما يُطلق عليه عادةً "أسس الرياضيات" لا علاقة له بتأسيس الرياضيات فعليًا. فحسابات فريجه أو راسل، بالنسبة لفيتجنشتاين، لم تكن أساس علم الحساب، بل حسابات جديدة، يمكن ربطها بتقنيات أخرى للعد والحساب، بحيث تشكل شبكة سميكة من المعايير التي تمثلها الرياضيات. فيقول:

" في هذا الإطار، فإن تعريفات راسل أو فريجه للأعداد هي تقنيات جديدة، تخضع لمعيار ينص على أنها يجب أن تتوافق مع أشكالنا القديمة في العد والحساب. إذا كان هناك عدم تطابق بين الحسابات القديمة والجديدة، فيجب تفسير ذلك – عادة كخطأ في اتباع قواعد حساب التفاضل والتكامل القديمة أو الجديدة. في حالات التناقض بين النظامين القديم والجديد، لا نشك في عدم تطابق النظامين، ولكن نفترض أن هناك خطأ في التزامنا بالأنظمة، حتى لو لم يكن لدينا سجل لعملية الحساب يسمح لنا بالعثور على الخطأ. " [٩] **(Wittgenstien,L: 1976, chapter28)**

صوت آخر مناهض للتأسيسية في تاريخ وفلسفة الرياضيات هو إيمري لاكاتوس (١٩٢٢-١٩٧٤ Imre Lakatos)، الذي صرح بعبارات لا لبس فيها أن " **المعرفة ليس لها أسس" (Lakatos: 1976, p.46)**. إحدى حججه ضد الأسس هي لغوية: **حتى النظام الصوري يتم تقديمه وصياغته بلغة طبيعية. لكن اللغات الطبيعية غير مستقرة ومتناقضة ومتغيرة. لذا فإن معنى القواعد الصورية عرضه في النهاية لعدم اليقين في اللغات الطبيعية". (Lakatos: 1976, p.89-90)**

يعتقد لاكاتوش أن الالتزام بنظام تأسيسي محدد دون تحديه قد يؤدي إلى الانحطاط. كان يعتقد أن هذا هو بالضبط ما حدث مع المسلمات الإقليدية والنيوتونية: لقد بدأت كأفكار ثورية جامحة، وانتهت إلى أن أصبحت سريرًا بروكروستيًا علميًا. بالنسبة لـ لاكاتوش، جدلية التفسيرات ليست تقييدًا مؤسفًا للغة البشرية، ولكنها المحرك

الإنتاجي للتحسين. ولأننا نستطيع على وجه التحديد التوصل إلى تفسيرات جديدة غير مقصودة للمصطلحات القديمة، يمكننا إثراء معرفتنا وصقلها. علاوة على ذلك، اقترح لاكاتوس للرياضيات، منهجية البرامج البحثية التي تسمح بالتعايش بين النظريات الرياضية المتنافسة. ويرى أن التقدم الرياضي يأتي من تطوير ومقارنة برامج البحوث المختلفة. (Lakatos:1976, p.48-49)

في ورقته البحثية "التعددية الرياضية" يقدم **بريست Priest** دفاعًا عن التعددية الرياضية. حيث يصرح بأن هناك تعدد في التحقيقات الرياضية. ولا يمكن اختزال كل هذه التحقيقات في براهين ضمن إطار نظرية المجموعات التي وضعها زيرميلو فرانكيل. وذلك فقط لأن بعضها يستخدم منطقًا غير كلاسيكي(مثل الفروع المختلفة للرياضيات الحدسية). ويقترح بريست النظر إلى هذه التعددية على أنها مماثلة لتعددية الألعاب، التي يمكن لعب إي منها[١٠].فيقول:

" شئنا أو أبينا، تبدو التعددية االرياضية وكأنها حقيقة من حقائق الحياة الرياضية، ومن واجبنا أن نفهم هذه الحقيقة، يمكن للمرء، إذا رغب، أن يعلن أن هناك رياضيات صحيحة واحدة(ZFC) وأن الباقي كله خاطئ. قد يبدو مثل هذا القول متهالكًا ويائسًا، كما أنه موقف يتسم بقدر كبير من الغطرسة" هناك تعددية حقيقة للرياضيات وهي متنوعة، كما يوضح فتجنشتاين، أن لكل منها مجموعة من القوعد الخاصة بها نحن جميعًا أحرار في متابعة أي منهم. جميع الممارسات متساوية .رغم ذلك، بالطبع من حيث الاهتمام الجوهري والإثارة والغنى والجمال والتطبيق وما إلى ذلك." (Priest, G: 2013, p.11-12)

من الدوافع أيضًا وراء التعددية هو الاعتراف بان النظريات الرياضية المختلفة يمكن أن تكون مفيدة في سياقات مختلفة. في مقالته "دفاع عن التعددية الرياضية" يدعو **بريان ديفيز Davies** إلى تجنب الاختيارات الفلسفية غير الضرورية. ويبرهن على التعددية الرياضية وإمكانية التعايش بين أنواع مختلفة من الرياضيات. في سياق

مناقشة الاختلافات بين الرياضيات الكلاسيكية والرياضيات البنائية، بحجة أن كل منهما نشاط صالح ضمن سياقه الخاص. يرى **أن:" الجدل حول الطريقة "الصحيحة" لممارسة الرياضيات هو جدل عقيم يؤدي إلى نتائج عكسية، كل إطار من الأطر صالح وله مزايا في الظروف المناسبة."**

(Davies, E.B:2004, P.10)

ويزعم ديفيز Davies بأنه ليست هناك حاجة للقيام باختيار فلسفي بين الرياضيات الكلاسيكية أو الرياضيات البنائية، بل قم بالاختيار اعتمادًا على المنطق الذي سيكون من الأسهل التعامل معه في السياق. وهو يسمي هذا الرأي "السياقية". وهو يقارن بين لعب الشطرنج في يوم من الأيام والربط بينها وبين الآخرى. لا تحتاج أي من الألعاب إلى التنافس على كونها اللعبة الصحيحة، ولكن بدلاً من ذلك يمكن الاستمتاع بها باعتبارها صالحة بنفس القدر. يشكك ديفيز أيضًا في معنى محاولة فك أسرار الرياضيات عن طريق المنطق الأساسي. إن التركيز على الجانب الصوري للحساب أو المنطق لاستبعاد كل شيء آخر في الرياضيات يشبه اعتبار القواعد النحوية أساسًا للتواصل المنطوق، بدلًا من الأفكار. (Davies, E.B:2004, P2-12)

قد يذهب الأمر إلى أبعد من ذلك، لا يجوز للمرء أن يقبل فقط أي أسس أو العديد منها فحسب، بل يجوز له أن يرفض فكرة الأسس برمتها. لا ينبغي أن يكون هذا الرفض مبنيًا على حقيقة أنه لا يوجد أساس واحد يجسد بشكل مثالي الرياضيات بأكملها. بل سيكون مبنيًا على الإدعاء بأن الأسس تخاطر بإعاقة الرياضيات.

لا يبدو المشروع التأسيسي مفيدًا لتطور الرياضيات. بالنسبة إلى أساس واقعي للرياضيات، سيتم رفض جميع الرياضيات التي لن يكون من الممكن اختزالها في النظرية التأسيسية باعتبارها غير صحيحة أو "سيئة"، وسنحصل على رياضيات دوغمائية. ومن أجل تأسيس أساس مناهض للواقعية، سيتعين علينا التخلي عن جميع

الرياضيات التي تعتمد على اللانهائي. وهذا من شأنه أن يشمل أجزاء ناجحة جدًا من الرياضيات، حساب التفاضل والتكامل على سبيل المثال. ومن كل هذا يتبين أن المشروع التأسيسي سيؤدي إلى تقييد الرياضيات. وهذه هي الحجة الأقوى لاحتضان التعددية، لأنها النظرية الفلسفية الوحيدة في الرياضيات التي لا تحد من الممارسة الرياضية. يستطيع التعددي أن يحتضن ويقدر المساهمات الواقعية والمعادية للواقعية في الرياضيات.

تجادل **فريند Friend** بأنه تكمن قوة الموقف التعددي في أن التعددي ببساطة ليس مضطرًا إلى الاختيار فتقول: "**قد تعكس ظواهر ممارسة الرياضيات، أو قد يكون من المفيد التفكير في أنطولوجيا الرياضيات باعتبارها ثابتة و"مستقلة" عنا. أو قد يكون من المفيد التفكير في الأنطولوجيا باعتبارها موجودة "في العقل" ولا توجد إلا عندما تكون تحت نظر العقل. بالنسبة للتعدديين، كلا النهجين مشروعان، ويؤديان إلى تطورات في الرياضيات، أو التدوين، أو في التفسير، ولا ينبغي استبعاد أي مفهوم من المحكمة، ما لم تكن هناك حجج قاطعة.(Friend, M: 2014, P.88)**

يرى عالم الرياضيات **روبن هيرش**[١١] **(Reuben Hersh:1927-2020)** أن اتخاذ موقف بشأن طبيعة الرياضيات يشبه إلى حد كبير رذيلة –جوهرية – الادعاء بأن بعض الوصف لظاهرة ما يجسد "حقيقة" تلك الظاهرة ثم محاولة إجبار ملاحظات تلك الظاهرة على التوافق مع هذا الجوهر المزعوم. يمكن للأصوليات المتنافسة أن تتجادل لفترة طويلة جدًا؛ لا توجد طريقة يمكن لأي منهما أن يجبر الآخر على الاستسلام. ويأمل هيرش في أن يميل بعض الفلاسفة إلى التخلي عن التناوب المعتاد في صالح التعايش السلمي. وستكون التعددية نعمة. فيقول:

"**هذه هي قصة الأفلاطونية الرياضية والرياضيات المناهضة للأفلاطونية. حتى أن مارك بالاجير نشر كتاباً يثبت أن أياً من هاتين النظريتين لا يمكن إثباتها أو عدم إثباتها. "ويخلص إلى القول بأن : "الأمر لا يتعلق ببساطة بعدم وجود أي حجج**

جيدة لصالح أو ضد الأفلاطونية في الوقت الحالي، بل إننا لا نستطيع أبداً أن نتوصل إلى مثل هذه الحجة". واستنتاج بالاجير صحيح. فمن المستحيل من حيث المبدأ إثبات أي نموذج لأي ظاهرة، لأن الظاهرة نفسها تسبق صياغتنا لها، ولا يمكن اعتبارها أو اختزالها في حجة رسمية."(Hersh, R: 2017, P.19-29)

يزعم **بريست Priest** في بحثه "من أسس الرياضيات إلى التعددية الرياضية"– خلال استعراض التطورات في أسس الرياضيات خلال السنوات الماضية – أن المشروع التأسيسي، على الرغم من أنه لم يكن الهدف أبدًا، فقد أثبت بالفعل موقف التعددية. فيقول:

"في القرن الثامن عشر، قام بعض علماء الرياضيات بالتحقيق في الهندسة الإقليدية، محاولين إثبات أن مسلمة التوازي يمكن استنتاجها من البديهيات الأخرى. لقد فعلوا ذلك من خلال "الاثبات بالتناقض برهان الخلف"، وهي طريقة شائعة لبناء البراهين الرياضية لذلك كانوا يفترضون نفيها وكانوا يهدفون إلى إيجاد تناقض. ومع ذلك، لم يجدوا تناقضًا، بل وجدوا بدلاً من ذلك هندسات غير إقليدية. لم يكن هدفهم إنتاج أشكال هندسية غير إقليدية؛ ولكن بحلول القرن التاسع عشر، أصبح من الواضح أن هذا هو بالضبط ما فعلوه. وبطريقة مماثلة، لم يكن الهدف من البحث في أسس الرياضيات هو تأسيس التعددية الرياضية– في الواقع... ولكن يبدو أن هذا هو ما فعلوه بشكل جماعي. لو كان المرء هيجل، لتشخيص هنا بالتأكيد حادثة رائعة في مكر العقل." (Priest, 2019, p.21)

اعتقد أن بريست Priest لديه نقطة جيدة هنا، على الرغم من العديد من المحاولات، من قبل العديد من علماء الرياضيات، على مدى فترة طويلة من الزمن، يمكن اعتبار عدم وجود دليل على وجود أساس بمثابة إثبات لعدم وجود أساس. ومع ذلك، ليس من الممكن استبعاد النظرية التأسيسية. من الممكن أن نجد النظرية الأساسية الحقيقية للرياضيات يومًا ما. أن التعددية لا تستبعد هذا الاحتمال، بل تكتفي

بالقول أنه بالنظر إلى النظريات التي لدينا اليوم، لا تكفي أي منها. ولكن حتى نتمكن من ذلك، يجب أن نسعى جاهدين لتوسيع واستكشاف الرياضيات قدر الإمكان.

بالإضافة إلى أسس الرياضيات، يمكن أيضًا تجسيد التعددية في النظريات الرياضية. يعد التطور التاريخي للهندسة غير الإقليديةnon-Euclidean geometry، وتحدي بديهيات إقليدسEuclid's axioms وإدخال نماذج هندسية بديلة، علامة بارزة في تعزيز التعددية الرياضية. إن التعرف على هذه الأطر الهندسية المتنوعة يوضح التعددية الرياضية من خلال إظهار أنه لا توجد طريقة واحدة "صحيحة" لفهم الفضاء والهندسة، مما يعزز فكرة أن الأنظمة المتعددة والمتسقة منطقيًا يمكن أن تتعايش، يقدم كل منها رؤى متميزة للحقائق الرياضية.

يمكن القول، في فلسفة الرياضيات يتم مقابلة التعددية بالشك. بين علماء الرياضيات الممارسين، دون علمهم، فإن التعددية هي القاعدة. هناك العديد من البدائل للهندسة الإقليدية[١٢]. تحتوي الرياضيات على العديد من الحقائق المتناقضة التي يتم استخدامها مع ذلك في الممارسة الرياضية. لقد تم تعديل الكثير من النظريات الرياضية مع تطورها، والرياضيات ليست ثابتة، بل هي في الواقع تنمو وتتغير دائمًا. إذا أنتج نظام رياضي تناقضات، فغالبًا لا يتم تجاهل النظام بأكمله، بل يتم تغيير البديهية التي ولدت التناقض أو تعديلها. لقد تم ممارسة الرياضيات، وما زالت تمارس، دون أي نظرية أساسية، لأن جزءًا كبيرًا من الرياضيات لا يمكن اختزاله في نظرية المجموعات. يواصل علماء الرياضيات إثبات النظريات بشكل مستقل عن وجهة نظرهم الوجودية عن الرياضيات، وبالتالي فإن الحقيقة الرياضية لا تعتمد على ماهية الرياضيات. إذا كانت العبارة الرياضية صحيحة، فستكون صحيحة بغض النظر عما إذا كانت الأفلاطونية أو الحدسية صحيحة.

إن إحدى الحجج المؤيدة للتعددية هي " حجة التواضع" وهي تقول: هناك نظريات وفلسفات رياضية مختلفة ومتضاربة في الرياضيات. ولم تنجح أي منها في

إقناع الجميع، أو حتى كل شخص" عقلاني". ولا يبدو أن هناك تقاربًا داخليًا بين المواقف أيضًا. وإعتمادًا على مدى دقة التمييز بين المواقف، فقد نتصور أن هناك عددًا متزايدًا من المواقف المعقولة. تصرح فريند بأن:" **يمكننا تصنيف النظريات أو الفلسفات جزئيًا، على أنها أكثر معقولية من الأخرى من خلال الحجج وزيادة معرفتنا واعتبارتنا. ولكن حتى الأكثر تعليمًا، لا نتفق على الترتيب. قد تؤدي الحجج والمعلومات المستقبلية إلى التقارب أو التباعد، أو التقارب الذي يليه التباعد أو العكس. نحن ببساطة لا نعرف. وبالتالي، ليس لدينا أساس عقلاني، ولا أساس موثوق**". **(Friend, M:2014, P.178)** إن التعددي يدرك أنه يقع في الزمن. وفي الوقت الحالي، بينما هو تعددي، فإنه لا يقتنع بنظرية عقائدية واحدة. وإلا فإنه يتوقف عن كونه تعدديًا. وبالتالي، يمكن للمرء أن ينتقل من موقف إلى التعددية والعكس.

تواجه **ميشيل فريند Friend**، باعتبارها إحدى المؤيدين الأحدث للتعددية مهمة أكثر صعوبة. هدفها هو إقناع الفلاسفة وعلماء الرياضيات بأن التعددية قابلة للدفاع عنها ولها. نظرًا لأن روايتها للتعددية ليس له أساس مستقل يمكن البناء عليه، فيجب أن تنبثق من المناقشات داخل وضد مجموعة متنوعة من المواقف التأسيسية. وهذا ما قامت به في الجزء الأول من كتابها " التعددية في الرياضيات (Friend 2014)[١٣]. وهذا يجعلها، في اعتقادي، محاولة مثيرة للإعجاب وجديرة بالثناء لتمهيد الطريق لخطاب وسيط جديد من داخل عالم من خيوط الخطاب المتضاربة أو المتنافسة.

قدمت فريند Friend دافعين للتعددية. الأول، بتقديم ثلاث حجج سلبية–لصالح التعددية– توضح سبب عدم كفاية الفلسفات التأسيسية الحالية للرياضيات. يأتي النقد بشكل أساسي من الرؤية الطبيعية التي مفادها أن الفلاسفة يجب أن يحترموا البوصلة والممارسة الرياضية والتقارير التي يقدمها علماء الرياضيات فيما يتعلق بآرائهم الفلسفية. بهذه الطريقة، تعد الطبيعية دافعًا للتعددية . ثم الدافع الثاني، والذي يأتي من

البنيويـة(لأنها أيضـاً مناهضـة للتأسيسـية فـي الرياضـيات). أنـه لا يوجـد مفهـوم مطلـق للحقيقة في الرياضيات. بدلاً من ذلك، هناك مفهوم قوي تمامًا لـ "الحقيقة في البنية". كفلسفة، تدفع التعددية كل من الرؤى الطبيعية والبنيوية إلى ما هو أبعد من التطورات الحالية لهذه المواقف. سوف نتناول هذه الحجج أوالدوافع بشئ من التفصيل:

الدافع الأول: الحجج السلبية من الرؤية الطبيعية للرياضيات

تتأثر التعددية بالطبيعية الرياضية لـ ماديMaddy في الجوانب التالية. فمع ماديMaddy، يهتم التعددي كثيرًا بممارسة الرياضيات، وهو على استعداد تام للسماح للممارسة الرياضية بتحديد ما يمكن اعتباره "رياضيات". ويختلف التعددي مع مادي Maddy بشأن القضايا المتعلقة بالميول الفلسفية لعلماء الرياضيات. بالنظر إلى القضايا المختلفة، يجد التعددي نفسه مدفوعًا نحو مفهوم أكثر تعددية للرياضيات من مادي(Friend, M:2014, P.31) "Maddy[١٤]

أول الحجج السلبية ضد التأسيسية: الانزلاق من الوصف إلى المعيارية.

تتعلق الحجة الأولى، بشكل عام، بدور الفيلسوف في مواجهة عالم الرياضيات. تستفيد فريند في حججها السلبية ضد الفلسفات التأسيسية للرياضيات، من الرؤية الطبيعية التي تقول أن الفيلسوف ليس موجودًا لوضع معايير النجاح في الرياضيات على أسس فلسفية بحتة. يتحمل الفيلسوف الطبيعي مسؤوليتين تجاه عالم الرياضيات. الأولى هي أن يأخذ على محمل الجد ما يقوله عالم الرياضيات نفسه عن الرياضيات، على المستوى الفلسفي. أما الطريقة الأخرى فهي تقديم فلسفة للرياضيات تنظر إلى كل الرياضيات كما تمارس، وليس فقط إلى جزء فرعي مناسب فلسفياً من الرياضيات. وكما تقول مادي Maddy : "**إذا تعارضت روايتنا الفلسفية للرياضيات مع الممارسة الرياضية الناجحة، فإن الفلسفة هي التي يجب أن تقدم الحل".(Maddy, P: 1997, p.161)** على النقيض من ذلك، ضمناً أو صراحةً، وبدرجات مُتفاوته، تؤيد

الفلسفات التأسيسية الفكرة العامة القائلة بأنه بمجرد أن يطور الفيلسوف فلسفة للرياضيات، فإن هذه الفلسفة، من بين أمور أخرى، لابد وأن تحدد حدود الرياضيات وتطورها في المستقبل وبالتالي، ما الذي يعد نجاحًا في الرياضيات.

من خلال توضيح الانزلاق من الوصف إلى وضع وتحديد معيار النجاح، يشكو فوبينكا Vopěnkaمن أن: " **نظرية المجموعات قوية للغاية، لدرجة أنها تحدد اهتماماتنا في الرياضيات، لذلك بينما تم اقتراح نظرية المجموعات كنظام اختزالي؛ وبمجرد القيام بذلك، أصبحت نظرية المجموعات معيارًا للنجاح a norm for success في الرياضيات: إذا لم يكن الموضوع الرياضي المقترح مثيرًا للاهتمام في نظرية المجموعات، فلا ينبغي أن يكون مثيرًا للاهتمام بالنسبة لعلماء الرياضيات. (Vopěnka: 1979, p. 9)**

بعبارة أخرى، أصبحت نظرية المجموعات الكانتورية هي المعيار الذي يتم بموجبه الحكم على الرياضيات المقترحة بأنها رياضيات "جيدة". اليوم، حلت نظرية ZFC محل نظرية المجموعات التي وضعها كانتور كنقطة مرجعية. وبموجب معيار ZFC للنجاح، فإن الكثير من نظرية الفئات ليست رياضيات، ولا نظرية النوع المتفرعة، ولا حتى نظرية المجموعات، ومن عجيب المفارقات، ليست كذلك. والأمر المهم هنا هو أنه من خلال تحليل فوبينكا يتضح أنه في إطار موقف أحادي فإننا ننتقل من الوصف إلى المعيار لتحقيق النجاح، وأن المعيار يمنع بعض التطورات المحتملة في الرياضيات، لمجرد أنها لا تُعَد رياضيات حقيقية. إن استبعاد التطورات الرياضية، عن طريق وضع المعايير، يتعارض مع الرؤية الطبيعية التي مفادها أن الفلاسفة (إذا كانوا من علماء الطبيعة) يجب أن يرغبوا في ملاحظة ليس فقط ما يقوله علماء الرياضيات عن موضوعهم، بل وأيضاً مراقبة سلوكهم.

(Friend, M:2013b, P 484)

الحجة السلبية الثانية: بناء الأسس (الأسس المقترحة مصطنعه).

هذه الحجة قائمة على سوء الوصف. مفادها أن أغلب الرياضيات يمكن اختزالها إلى الأساس. وهذا وصف خاطئ للرياضيات من جانبين: أولاً؛ يكون الاختزال في بعض الأحيان مصطنعًا للغاية، وبالتالي فهو غير ناجح. ثانيً، أي أساس مقترح ليس سوى أساس. أي أنه يمكننا إضافة المزيد إلى الأساس. بمعنى، أن أي نظرية تأسيسية لدينا سوف تنمو – بإضافة بديهيات جديدة– ومع نموها، فإننا نفهم الأجزاء المؤسسة في ضوء جديد. وبالتالي ليس هناك ما يبرر الإيمان بوجود أساس ثابت مطلق للرياضيات. (Friend, M:2013b, P ٢٨٤.)

الحجة السلبية الثالثة: "القول والفعل" كثير من علماء الرياضيات يؤمنون بالتعددية.

العديد من علماء الرياضيات تعدديين، يعارضون الأسس. أو بعبارة أكثر اعتدالاً، ينظرون إلى الأسس بعين الريبة والشك. فضلاً عن ذلك فإن العديد من علماء الرياضيات لا يكتفون بالقول بالتعددية، بل إن العديد منهم يؤيدون التعددية من دون قولها. أي أن سلوكهم في المؤتمرات، وفي أعمالهم المكتوبة، يعكس انفتاحاً وقبولاً للنظريات التأسيسية البديلة ـ إن لم يكن تجاهلاً تاماً للمفهوم (الفلسفي) للأساس. فضلاً عن ذلك فإن علماء الرياضيات في إثباتاتهم ومنهجياتهم غالباً ما يستعينون بأي فرضيات مفيدة وقادرة على دعم النتيجة المرجوة.

" **... يبدو أن الفلاسفة يتجاهلون تماما حقيقة أن هناك العديد من الأسس المتنافسة، ولا يوجد أي منها يتمتع بمكانة متميزة تمامًا، ربما باستثناء نظرية مجموعات زيرميلو–فرانكل – لكن حتى هذا لا يمكن أن يدعم الادعاءات الفلسفية، حيث كانت هناك جميع أنواع البراهين متساوية الاتساق حولها. لن يكون هناك جدوى من تقديم مثل هذه البراهين إذا كانت الأسس "المنافسة" الأخرى لا شيء. كان علماء الرياضيات وعلماء المنطق في عروضهم التقديمية وفي خطابهم غير الرسمي**

على استعداد تام لأخذ النظريات الأخرى التي تتعارض مع النظريات التي كانوا يعملون فيها على محمل الجد. في الواقع هذا هو أحد الأسباب التي تجعلهم يذهبون إلى المؤتمرات: لمعرفة ما يجري في مجالات أخرى، لمعرفة كيف تشترك النتائج في مجال واحد من الرياضيات في الميزات مع ميزاتها. سيتحدثون بسعادة تامة عن المؤسسات المتنافسة في نفس الوقت، ولن يطرحوا أحدها. بدلًا من ذلك، احتضنوا الكثير"(Friend, M:2014, P.vii)

وتبرهن فريند على ذلك بالقول: " **في المحادثات، أعلن أندريكا Hajnal Andréka,، وتشوب Chubb، وإينايت Enayat، وهاريزانوفHarizanov، وكوفمان، وماكلارتي، وميلرRussell Miller، ومراد Joe Mourad، ونيميتي István Német، ... والعديد من علماء الرياضيات العاملين الآخرين أنهم جميعًا من أتباع التعددية، بمعنى ما من معاني "التعددية". أعتقد أن التعددية "موجودة في الهواء"، لكنها لم تُصاغ كموقف فلسفي كامل، بل كموقف داخل مواقف أخرى."** (Friend, M:2014, P.64) & (.Friend, M:2013b, P 288)

وهذا ما أكده **كريس مورتنسن Chris Mortensen** في كتابه "الرياضيات غير المتسقة": " **إن العديد من علماء الرياضيات العاملين – وإن لم يكن جميعهم يشكون في المحاولات الواضحة التي يبذلها علماء المنطق [والفلاسفة] للاستيلاء على موضوعهم من خلال التأكيد على أسسه. ... [وعلاوة على ذلك] يؤكد احد علماء الرياضيات بأن التأسيسية في الرياضيات يجب أن يُنظَر إليها بقدر كبير من الشك؛ أو على الأقل أن "الأسس" الصحيحة، ... ستكون أكثر تعقيدًا ودلالة من المحاولات التي بذلها المنطق الرياضي في القرن العشرين. وفي هذه الحالة، سيكون من الممكن الجدال حول ما إذا كان "الأسس" مصطلحًا مناسبًا appropriate term.** (Mortensen, C: 1995, p. 4)

خلاصة القول، إن التعددية التي تحركها الطبيعية، لا تمنع الفيلسوف أو عالم الرياضيات من العمل ضمن حدود الفلسفة، ولكننا نريد أن نميز بين التمسك بنظرية لأسباب تقنية أو لأسباب تاريخية أو لأسباب تتعلق بالذوق الشخصي، من ناحية، والتمسك بنظرية فلسفية أو رياضية لأسباب تأسيسية. بالنسبة للتعددي، تقتصر القوة المعيارية للفلسفات التأسيسية على فئة من النظريات. وبالتالي، فهي محدودة وليست مطلقة. وإذا تحدثنا من منظور التعددية: فإن معيارية الموقف الفلسفي تظل داخلية بالنسبة لتلك الفلسفة، وتقتصر على نطاق الأساس. وعلى حد تعبير فريند:

"ولا ينبغي لهذا أن يزعج فلاسفة الرياضيات التقليديين كثيراً: فهم في نهاية المطاف لديهم فئة كاملة من النظريات تحت تصرفهم. فضلاً عن ذلك، قد تكون هذه فئة مناسبة. لذا فإنهم يمتلكون ساحة لعب كبيرة إلى حد ما. ولكن في نهاية المطاف، يطلب منهم التعددي الاعتراف بمعايير ساحة اللعب. وبعبارة أخرى، وفقاً للتعددية، فإن ما لا يجوز للمؤسسي أن يفعله هو أن يزعم أنه يقدم فلسفة لـ "كل" الرياضيات. فهناك رياضيات مشروعة ومثيرة للاهتمام تماماً خارج المؤسسة."

(Friend, M:2013b, P. 290)

بالنسبة للتعددي، لا توجد حقيقة رياضية مطلقة، بل حقيقة داخل نظرية فقط. لا يوجد جوهر واحد للرياضيات يتميز أو يمثله نظرية تأسيسية رياضية معينة. التعددية في الرياضيات تشكل تحديًا للفلاسفة، لأنها غريبة عن الفلسفات التأسيسية الأكثر تقليدية للرياضيات. ومع ذلك، فهي ليست تحديًا لا يمكن التغلب عليه. يعتبر شابيرو نفسه تعدديًا، ويقدم فلسفة "بدون تأسيسية". ننتقل إلى الدافع الثاني للتعددية الرياضية.

الدافع الثاني: بنيوية شابيرو

تصرح فريند بأن: " **التعددي يستمد إلهامه من موقف شابيرو، وخاصة من خلال معاداته للتأسيسية و من خلال تعدديته المعلنة. .. ينضم التعددي إلى شابيرو**

في الحجة ضد الموقف الواقعي "الساذج".. وعلى نحو مماثل، ينضم التعددي إلى شابيرو في تأييد فكرة وجود العديد من الهياكل أو النظريات الرياضية، كل منها فقط مقارنة بالآخرين من منظور/ بنية/ نظرية ميتافيزيقية، والتي بدورها لا يمكن الحكم عليها أو مقارنتها إلا من منظور/ بنية ميتافيزيقية أخرى. ومع ذلك، فإن التعددي يدفع بتعددية شابيرو إلى أبعد من ذلك. وعلى وجه الخصوص، لن يقتصر التعددي على المنظور الذي يسترشد به المنطق الكلاسيكي من الدرجة الثانية ونظرية النموذج. إن ما يثير الخلاف هنا هو المفهوم الكلاسيكي للمنطق، وخاصة الفكرة القائلة بأن التناقض يؤدي بالضرورة إلى الكارثة في شكل تفاهات، ومفهوم/فكرة النجاح في الرياضيات. ولتوضيح النقطة الأخيرة،سيتم التمييز بين التعددية المثلى Optimal Pluralist والتعددية القصوى Maximal Pluralism. (Friend, M:2014, P.51)

قدم شابيروStwart Shapiro، وهو فيلسوف بارز في الرياضيات، رؤى تتوافق مع أفكار التعددية الرياضية. تؤكد فلسفته في الرياضيات على مفهوم وجهات النظر المتعددة. والأساليب داخل الرياضيات. وهو يدرك أن الأنظمة الأساسية والأطر الرياضية المختلفة تقدم رؤى وأساليب متميزة لدراسة الأشياء والهياكل الرياضية. تتوافق آراء شابيرو مع الفكرة التعددية القائلة بأنه لا يوجد إطار مميز واحد أو نظام تأسيسي يجسد الواقع الرياضي بأكمله.

دعا شابيرو إلى شكل من أشكال التعددية الرياضية المعروفة باسم البنيوية: تتمثل البنيوية في الرأي القائل بأننا نجد داخل تخصص الرياضيات عددًا من النظريات. ويمكن تصور النظريات باعتبارها هياكل أو مجموعة من الصيغ المغلقة تحت بعض العمليات. وبالتالي، فإن جميع صيغ النظرية تكون صحيحة في النظرية. والأشياء ليست سوى أشياء في بنية. ولا يمكن الحكم على صدق النظرية إلا من

منظور ميتافيزيقي. ويعتمد ما إذا كانت النظرية صحيحة أم لا على اختيار البنية الميتافيزيقية.

في كتابه "التفكير في الرياضيات: فلسفة الرياضيات"، قدم **شابيرو Shapiro**، مناقشة دقيقة حول طبيعة الهياكل الرياضية، ويضع حجر الأساس للتعددية الرياضية[١٥]. يوضح شابيرو أن عالم الرياضيات مهتم بالعلاقات الداخلية لأماكن هذه الهياكل".و يُعرِّف البنية بأنها "الشكل المجرد للنظام، الذي يسلط الضوء على العلاقات المتبادلة بين الأشياء، ويتجاهل أي سمات لها لا تؤثر على كيفية ارتباطها بأشياء أخرى في النظام.من خلال التركيز على دراسة الهياكل المجردة بدلاً من الأشياء داخل هذه الهياكل، يدعم موقف شابيرو البنيوي بطبيعته التعددية، ويدعو إلى التعايش بين نظريات رياضية متعددة تصف الهياكل الفريدة داخل المشهد الرياضي الموسع. (Shapiro, S:2000, p.275-280)

إن بنيوية شابيرو مثيرة للاهتمام لأنها ليست أحادية ولا ثنائية، بل إنها مناهضة للأصولية والتعددية بشكل صريح، وتدعو إلى موقف "الرياضيات أولاً" الذي يقترب من الرؤية الطبيعية. يمكن القول أن موقفه هو الأقرب إلى التعددية المدعومة هنا. إن البنيوية التي يتبناها شابيرو هي فلسفة في الرياضيات حيث يتم دائمًا تقييد مفهوم "الحقيقة" بمفهوم "في البنية". وهو يستخدم لغة المنطق من الدرجة الثانية شديدة التعبير لالتقاط مفاهيم رياضية مهمة، مثل نظرية النموذج لاختيار الهياكل (والتي، بالنسبة لشابيرو، هي ما يهتم به علماء الرياضيات).

بالنسبة لشابيرو، نظرية النموذج ليست أساسًا، بل هي منظور تنظيمي يسمح بالتمييز الواضح للنظريات الرياضية، ومقارنة النظريات أو الهياكل المختلفة من وجهة نظر الهياكل الفوقية الأخرى المختارة. لا توجد بنية نهائية، وإلا فإنها قد تتعرض للتناقض. ولا يوجد منظور مطلق. ولا توجد بنية مفضلة في نهاية المطاف على

الآخرين (لأن نظرية النموذج ليس لها بنية عالمية واحدة). نظرية النموذج ليست نظرية بديهية، وبالتالي فهي تتمتع بالمرونة اللازمة للنمو، دون المساس بالاستقرار. ولا شك أن ما يُعترف به كبنية سيتغير بلا شك بمرور الوقت، لأن نظرية النموذج هي نظرية متطورة.

في سياق التعددية الرياضية، تتوافق بنيوية شابيرو مع فكرة وجود أطر أو أنظمة رياضية متعددة صالحة. وهو يدرك أن الهياكل الرياضية المختلفة يمكن أن تكون مفيدة لأغراض ومجالات بحث مختلفة. يرى شابيرو أن الهياكل الرياضية توفر وجهات نظر وأدوات مختلفة لفهم ووصف جوانب مختلفة من العالم. يتحدى عمل شابيرو حول البنيوية والتعددية الرياضية وجهة النظر التقليدية القائلة بأن الرياضيات هي نظام متجانس وموحد. يسلط منظوره الضوء على تنوع الأطر الرياضية وأهمية فهم الرياضيات من حيث علاقاتها الهيكلية.

التعددية تتفق مع البنيوية، في الزعم أن "الحقيقة في البنية" تلقى قبولاً أفضل لدى العديد من علماء الرياضيات اليوم، مقارنة بـ "الحقيقة الرياضية" التي قد يعلنها عالم واقعي أو أفلاطوني. فالعديد من علماء الرياضيات لا يؤمنون بالتعددية فحسب، على الأقل في هذا الصدد، بل إنهم يدركون تمام الإدراك السياق المحيط بنظرية أو برهان، أو حدود تلك النظريات. ولهذا السبب ينجذبون إلى البنيوية.

بالنسبة للتعددي، يستطيع منظِّر النموذج أن "يرى" الكثير من الرياضيات، وأن يفهمها، وأن ينظمها ضمن القيود التي تفرضها نظريته النموذجية، وأن يقدم مساهماته ويعرض رؤاه. وهو يميز بين البنيات حتى التماثل الشكلي، ويتعرف على كل المفاهيم التي يمكن التعبير عنها بلغة من الدرجة الثانية. إن التعددي سوف يكتشف الآن وجود قيد. إن البنيوي عند شابيرو يستطيع أن يرى الكثير من الرياضيات، ولكن ليس كل الرياضيات. ونتيجة لهذا فإن التعددية عند شابيرو تقتصر على ما يتم التعرف عليه من

خلال عدسة نظرية النموذج وما يمكن التعبير عنه بالمنطق من الدرجة الثانية، وهذه العدسة تحدد بعد ذلك معياراً لما يمكن اعتباره رياضيات ناجحة. وبروح المزاح الودي، قد نقول إن شابيرو أيضاً مذنب ببعض خطايا التأسيسية. على حد تعبير فريند. (Friend, M:2013b, P.292)

تتجاوز التعددية، بنيوية شابيرو فيما يتعلق بالقضايا المهمة للغاية المتعلقة بما يمكن اعتباره نجاحاً في الرياضيات وما الذي يثير اهتمام الفيلسوف. فالبنيوي ينتقي كل الرياضيات التي يمكن التعرف عليها من خلال نظرية النماذج باعتبارها رياضيات ناجحة. أما بقية الرياضيات فلا. وعلى النقيض من ذلك، لا يعتمد النجاح بالنسبة للتعددي على القدرة على الاعتراف بنظرية معينة، مهما كانت مفتوحة وسخية. بل يتم الحكم على النجاح بالإشارة إلى مجتمع علماء الرياضيات. والتعددية أكثر طبيعية من البنيوية. ومن الأمثلة على أجزاء من الرياضيات التي لا تعترف بها منظري النماذج، ولكن التعددي يعتبرها مثيرة للاهتمام ومفيدة للرياضيات. المنطق المتعمد، نظرية رياضية لا تزال في مرحلة التطور والرياضيات المتناقضة(غير المتسقة). الرياضيات غير الناجحة هي الرياضيات التافهة. (Friend, M:2013b, P.292)

لكي نميز بين "النجاح" و"بقية" الرياضيات، مع الحفاظ على التعددية، فلنفرق بين فلسفة التعددية المثلى وفلسفة التعددية القصوى. التعددية المثلى تقدم معايير للنظريات ذات الدوافع الفلسفية الجيدة، أي للرياضيات "الناجحة" المقبولة بشكل قاطع. وشابيرو مثال على التعددية المثلى. وقد تكون هناك عدة معايير متنافسة. وقد تشمل: الاتساق، والاعتبارات البناءة، وتعريفات الصلاحية، والبحث عن وجود قوي وما إلى ذلك. والمعيار البنيوي هو "يمكن التعرف عليه من خلال نظرية النموذج"، ومن ثم من خلال الانتقالية، تتراكم جميع المعايير التي تتمتع بها نظرية النموذج.

وعلى النقيض من ذلك، فإن التعددية القصوى هي وصفية إلى أقصى حد: حيث تحاول أن تفسر فلسفيًا مجموعة النشاط الرياضي بأكمله. إن التعددي الأقصى

يكره وضع أو تثبيت معيار للنجاح في الرياضيات، وسوف يستوعب أو يفسر أو يدرس النظريات "السيئة" دون أن ينزلق هو نفسه إلى التفاهة. في ظل الموقف الأقصى، يمكن للتعددي، بالطبع، ملاحظة وضع المعايير من قبل المجتمع الرياضي؛ المعايير، كما هو مذكور في الممارسة المهنية للرياضيات. لكن التعددي لن يحكم بين المعايير المتنافسة (على عكس التعددي الأمثل). لهذا السبب، يتعين على التعددي أن يستوعب ما كان يُعتقد تقليديًا أنه نظريات رياضية "سيئة". (Friend, M:2013, P.293-294)

يمكن إجمال القول بأن فريند قدمت أربع حجج ضد عدد من الفلسفات الأخرى في الرياضيات، كل تلك الفلسفات التي تتبنى الأسس. تعتمد كل الحجج على بعض التعاطف مع الطبيعية؛ وهو التعاطف الذي يشترك فيه البنيويون والتعدديون. ويمكن ترقيم الحجج على النحو التالي:

١- إن الفلسفات التأسيسية تنزلق بشكل غير مشروع من وصف الرياضيات إلى قاعدة للنجاح في الرياضيات المستقبلية.

٢- حتى لو تصورنا وجود نظرية أو بنية فريدة، فإن موقفنا سوف يكون غير مستقر إلى حد كبير، وذلك لأن أي نظرية تأسيسية نمتلكها اليوم سوف تنمو- بإضافة بديهيات أو قواعد جديدة. وبعض البديهيات الجديدة مستقلة، وبالتالي فليس هناك ما يبرر الاعتقاد بوجود أساس ثابت حقيقي للرياضيات.

٣- في كثير من الأحيان، يكون علماء الرياضيات تعدديين.

٤- تتفق التعددية مع البنيوية، وتزعم أن "الحقيقة في البنية" تلقى قبولاً أفضل لدى العديد من علماء الرياضيات اليوم مقارنة بـ "الحقيقة الرياضية" التي قد يعلنها عالم واقعي أو أفلاطوني. ليس فقط أن العديد من علماء الرياضيات متعددون، على الأقل في هذا الصدد، بل إنهم يدركون تمام الإدراك السياق المحيط بنظرية أو إثبات، أو حدود تلك النظريات.

الأبعاد الفلسفية والمنطقية للتعددية الرياضية:

في كتابها" **التعددية في الرياضيات**" تُعرف **فرينـد Friend** التعددية بأنها: **الموقف الفلسفي الذي يعترف ويحتضن العديد من المناهج والأساليب والنظريات الصحيحة في الرياضيات. ويدرك هذا المنظور أن الأطر الرياضية المتنوعة يمكن أن تتعايش بانسجام، حيث يقدم كل منها رؤى قيمة ويساهم في ثراء وتعقيد المعرفة الرياضية. تؤكد التعددية الرياضية على قبول وجهات النظر الرياضية المختلفة والاعتراف بشرعية الممارسات الرياضية المختلفة، وتسليط الضوء على التنوع والتعدد المتأصل في التفكير والتحقيق الرياضي". (Friend, M: 2014)**

الرسالة التعددية ذات شقين؛ فبدلاً من محاولة ملائمة الرياضيات لفكرة فلسفية، فإنها تلائم الفلسفة لاستيعاب الممارسة الرياضية. وعلاوة على ذلك، فهي تشكك في مفهوم الحقيقة وتصر على أن الحقيقة لا يمكن فهمها إلا في سياق معين. يقدم **هيرش Ruben Hersh في** كتابه "إضفاء الطابع الإنساني على الرياضيات وفلسفتها" الملاحظة التالية المثيرة للاهتمام فيقول: " **ومع ذلك فهي (التعددية) ليست فلسفة للرياضيات. لأنها لا تقول شيئًا عن الرياضيات نفسها، ولا عن أنطولوجيتها، ولا عن نظريتها المعرفية، ولا عن ممارستها. إنها "موقف" في مجال أسمى، والذي ينبغي أن يسمى ما وراء/ميتا فلسفة الرياضيات. التعددية هي موقف حول فلسفة الرياضيات. إنها فلسفة حول فلسفة الرياضيات. (Hersh, R:2017, P.21)**

كان هيرش Hersh، مدافعًا صريحًا عن التعددية في الرياضيات. وهو ينتقد فكرة الرياضيات "الصحيحة" الواحدة ويؤكد على أهمية الثقافات والمناهج الرياضية المختلفة، فيقول:" **التعددية هي التعايش السلمي لعدة نظريات متناقضة، وهي فكرة جديدة عظيمة... إذا وضعنا فلسفة الرياضيات ضمن مجموعة كاملة من دراسات الرياضيات، سواء الإنسانية أو العلمية، فيمكننا أن نرى أهمية الشكلية، والمنطقية،**

والاسمية، والبنيوية، والطبيعية، وحتى البنائية الاجتماعية، في ضوء جديد. كل واحد منهم هو في الواقع نموذج للرياضيات. وبهذه الطريقة، يكون كل منهما مشروعًا، ولا أحد يمنع الآخر من مواصلة عمله." (Hersh, R:2017, P.21)

بهذا يبدي هيرش توافقه مع فريند من أجل تبني موقف تعددي في فلسفة الرياضيات. ويعتقد أن هذا الموقف سوف يتعزز من خلال التفكير في "المواقف" المختلفة باعتبارها نماذج وصوراً للرياضيات تركز على جانب واحد من الرياضيات أو آخر. ومن ثم يصبح الفيلسوف أكثر استعداداً للتفاعل مع المؤرخ أو عالم الإدراك. فيقول:

" ستتبع التعددية نتيجة لعرض المواقف الفلسفية حول الرياضيات كنماذج للرياضيات. وسيكون هناك تعايش سلمي، بدلًا من الصراع والمعارضة. قد تكمل النماذج المختلفة بعضها البعض، بل وتتلاءم معًا. وبدلاً من ازدراء جانب الرياضيات باعتباره نشاطًا مستمرًا للأشخاص الفعليين، يمكن للفلاسفة أن يسعوا إلى تعميقه وتوحيده. كيف تتناسب النماذج المختلفة معًا؟ كيف يفشلون في التوافق معًا؟ وما هي مساهماتهم وعيوبهم؟ ما الذي لا يزال مفقودًا؟ وهذا الدور لفلسفة الرياضيات سيكون أعلى من الدور المخصص لها عادة."(Hersh, R: 2017, P.19-29)

تسلط مساهمات **فريند Friend** المزيد من الضوء على الأسس الفلسفية للتعددية الرياضية. في ورقتها البحثية "التعددية والنظريات الرياضية "السيئة": تحدي تحيزاتنا"، تعكس دعوتها للفهم التعددي للرياضيات التزامًا بالاعتراف بصحة وفائدة النظريات الرياضية المتنوعة، حتى تلك التي قد تبدو في البداية على أنها "سيئة"، أي النظريات الرياضية التي تعتبر تقليديًا أقل صحة أو غير صحيحة أو غير تقليدية من وجهة نظر الممارسة الرياضية السائدة . فتصرح بأن:

" يتم تُقدَّم التعددية كفلسفة جديدة ومستقلة للرياضيات في حد ذاتها. إحدى علامات الاستقلال عن المواقف الفلسفية الأكثر شيوعًا أن التعدديين يأخذون الرياضيات "السيئة" على محمل الجد. وتحت "الرياضيات السيئة" أدرج: النظريات غير المتسقة inconsistent theories، والنظريات التافهة trivial theories، والنظريات غير المكتملة بعد not yet completed theories، والنظريات القصدية intensional theories. ويتجاهل فلاسفة الرياضيات التقليديون النظريات الرياضية "السيئة" لأنهم يعتبرون أن مهمة الفيلسوف هي تقديم فلسفة للرياضيات الناجحة أمرًا مفروغًا منه. وعلى النقيض من ذلك، يزعم التعدديون أن النظريات الرياضية "السيئة" تشكل جزءًا من "الرياضيات" بقدر ما تشكل الأجزاء الناجحة جزءًا منها. وعلاوة على ذلك، فهي مهمة فلسفيًا. (Friend, M:2013b, P.277)

تقدم **فريند Friend** الدوافع التي تدفع إلى التفكير في الرياضيات "السيئة" على الإطلاق. وتبدأ بالرياضيات غير المتسقة، فهناك الآن مجموعة من المؤلفات حول المنطق غير المتسق والرياضيات غير المتسقة. ويأخذ بعض علماء الرياضيات هذه المؤلفات على محمل الجد. إن فلسفة الرياضيات التي لا تعالج هذه الأمور هي فلسفة غير مكتملة، وتنتهك الموقف الطبيعي. النوع الثاني من الرياضيات المهمة (وربما الناجحة)، بالنسبة للتعددية، هي النظريات الناشئة. وهي النظريات التي تتجاهلها الفلسفات الأخرى، لذلك تعتبرها "رياضيات سيئة". وهذه نظريات لا تزال في طور النشوء. وكل النظريات تمر بمرحلة "البناء" أو "النشوء" إن العديد من النظريات الرياضية ناشئة. وأي فلسفة رياضية لا تستوعب النظريات الناشئة سوف يجدها التعددي ناقصة. (Friend, M:2013b, P.293)

إن النظريات التافهة هي الأكثر إثارة للجدل من بين النظريات "السيئة". النظرية الرياضية التافهة هي تلك التي تكون فيها كل صيغة جيدة الصياغة في لغة

النظرية صحيحة. ويتم التمييز النظريات التافهة والنظريات الأخرى من خلال لغتها. بالنسبة لأي نظرية رياضية تافهة، لابد من يتوافر عاملين؛ يجب أن يكون المنطق الأساسي للنظرية كلاسيكيًا (يجب أن يسمح باستدلالات خاطئة) ويجب أن يكون هناك تناقض يمكن استخلاصه من البديهيات باستخدام قواعد الاستدلال الخاصة بالنظرية.

تاريخيًا، هناك ثلاث نظريات رياضية كان لها تأثير عميق على الرياضيات والمنطق، ووجد أنها تافهة. هذه هي: نظرية المجموعات الساذجة لكانتور Cantor's naïve set theory، ونظرية المنطق الصورية لفريجة Frege's formal theory of logic، والنسخة الأولى من نظرية المنطق الرياضي الرسمية لتشرش Church's formal theory of mathematical logic. كان لكل من النظريات الثلاث تداعيات عميقة على الرياضيات اللاحقة. ولم يؤد أي منها إلى انهيار "كل الرياضيات". ولم يؤد أي منها حتى إلى انهيار "ذلك الجزء من الرياضيات المصاب بالنظرية"[١٦]. (Friend, M:2013b, P.294-295)

تتوسع **فريند Friend** في هذا الأمر من خلال تحدي الأحكام المسبقة ضد النظريات الرياضية "السيئة" والدعوة إلى رؤية أكثر شمولاً تعترف بإنتاجية وجود أطر رياضية متعددة، وحتى متضاربة. فتصرح:

" إن الادلة المهمة التي تحتويها النظريات التافهة المذكورة أعلاه لا تنطلق من استدلالات كاذبة، وهذا أحد الأسباب التي تجعل النظريات مهمة على الرغم من كونها تافهة. إن النظريات التافهة الجيدة يتم دراستها والبحث عنها للحصول على أفكار ورؤى جيدة. بشكل عام، بعد اكتشاف التناقض، يحاول علماء الرياضيات إصلاح النظرية بأقل قدر من التغييرات. لذلك، لا ينبغي رفض النظريات "السيئة" باعتبارها جزءًا من مجموعة الرياضيات من قبَل علماء الطبيعة، فمن الطبيعي

محاولـة تبنـي موقـف التعدديـة القصـوى، ولـيس فقـط موقـف التعدديـة المثلـى. (Friend, M:2013b, P.295) إن تجاهل التأثير الرياضي والفلسفي لمثل هذه النظريات، مرة أخرى، من شأنه أن يوفر فلسفة للرياضيات تفتقر إلى النطاق.

إن المشكلة التي يراها التعدديون، إن التحرك الفلسفي المتمثل في رفض الرياضيات "السيئة" يسيء إلى البصيرة الطبيعية، ويعرضها لخطر عدم الاستقرار. إن الفلسفة التعددية التي تم تطويرها هنا أكثر استقراراً من التعددية التي يتبناها شابيرو والفلسفات الأكثر تقليدية أيضاً. وهذا ما توضحه **فريند Friend** في قولها:

" نظرًا لأن التعددية تتمتع بالمرونة اللازمة للتكيف مع التغيرات التي تطرأ على مدار الزمن في ما يعتبر رياضيات ناجحة. فالنظريات الغريبة تجد فجأة تطبيقاً لها؛ وتثبت بعض النتائج الغامضة فائدتها في مجال رياضيات أكثر مركزية. والنظريات التي كانت موضع شك شديد أصبحت مقبولة في الرياضيات الأكثر شيوعًا، والأمر الأكثر أهمية هو أن هناك ثورات في الرياضيات، مثل الاكتشافات التي أجريت على الأشكال الهندسية غير الإقليدية، أو نتائج عدم الاكتمال. هذه الثورات تغير مفهومنا للرياضيات بشكل جذري، وقد يستغرق تغيير المفاهيم وقتًا طويلاً. وعلى الجانب الآخر، نرى أن بعض الرياضيات التي اعتُبرت ناجحة للغاية قد اندثرت أو لم تعد تُدرَّس. "[١٧] (Friend, M:2013b, P.295)

باختصار، النجاح ليس تراكميًا (ليس من الصحيح أن النجاح مرة يعني النجاح إلى الأبد). النجاح في الرياضيات مؤقت. والنجاح يحكم عليه مجتمع من علماء الرياضيات الذين يغيرون آراءهم بشأن معايير النجاح. ولعلاج عدم الاستقرار، يمكننا أن نكون أكثر حذراً من خلال تحديد مقياس نجاحنا من خلال مؤشر زمني، وربما حتى مؤشر مجتمعي (كانت هذه النظرية مقبولة بشكل جيد من قبل علماء الرياضيات السوفييت في الخمسينيات ولكن ليس من قبل "علماء الرياضيات الغربيين" مثلاً...) وعندها يصبح أي "رفض" نسبياً ومستقراً وغير ضار، وأكثر دقة. وهذه بداية طيبة،

ولكن التعددي أكثر طموحاً من هذا. فهو يريد أن يقول شيئاً محدداً عن طبيعة الحقيقة الرياضية وأهميتها.

في بحثها المعنون" عرض فلسفي للتعددية" تصف فريند أن التعددي معياري، ليس فقط فيما يتعلق بالممارسة الرياضية، ولكن الأهم من ذلك، فيما يتعلق بالفلسفات الأخرى للرياضيات. فتذكر فريند أن: " **التعددي هو شخص يضع معايير "ناعمة" فيما يتعلق بالمواصفات والدقة والتواصل. إن المعيارية "الناعمة" هي ببساطة تشجيع يأتي من الطموح (لجعل البيانات واضحة قدر الإمكان)؛ على النقيض من وضع معيار، وإلزام النفس والآخرين بهذا المعيار." فالتعددي هو معياري (بكل تأكيد) فيما يتعلق ببعض الحقائق داخل النظرية .(Friend, M: 2014, P. 105)**

إن معيارية التعددية تؤثر على نطاق اهتمامها. ولأن التعددي ليس معيارياً بمعنى التمسك بنظرية رياضية معينة لوضع معيار، فإنه يوسع نطاق اهتمامه إلى ما هو أبعد من نطاق الفلسفات الأكثر تقليدية. فهو لا يهتم فقط بالرياضيات الناجحة وما يعتبر "جيدة"، بل يهتم أيضاً بما يعتبر "رديئة أوسيئة"، وكيف تؤثر الأجزاء "السيئة" على الأجزاء "الجيدة". لاحظ أن "الجيد" و"الرديء" بين علامتي اقتباس؛ وذلك لأن أحكام القيمة هذه لا يتخذها التعددي. بل يرى التعددي أنها صادرة عن علماء الرياضيات والفلاسفة غير التعدديين. لن يتم تأييدها، إلا باعتبارها اختصارات تقنية لوصف دقيق للغاية لكيفية التوصل إلى الحكم. وهذا يعني أنه بالنسبة للتعددية، لا توجد نظرية رياضية "جيدة" بحد ذاتها، بل توجد فقط نظرية جيدة وفقًا لمجتمع علماء الرياضيات أو بعض المقاييس النوعية التي تم تحديدها– أو في طور التحديد.[١٨]

(Friend, M:2014, P. 105-106)

إذا كان الإثمار "جيدًا"، ثم إن بعض الأخطاء في الرياضيات هي أيضًا "جيدة". ففي كثير من الأحيان يدافع الفلاسفة عن جزء من الرياضيات أو العلوم على أساس أنه مثمر. وفي ضوء ثمار بعض الأخطاء، يتعين على الفلاسفة الذين يقدرون

الثمار بإعتبارها خاصية للنظرية أن يدرسوا الأخطاء المثمرة في الرياضيات، كما اقترح لاكاتوس. ونتيجة لهذا: فإن النظريات "المعيبة"، والأخطاء أو البراهين "الخاطئة"، التي تجاهلها الفلاسفة في الماضي، أصبحت الآن موضع تساؤل. لا يمكن تجاهل هذه الأمور بسهولة من قبل التعدديين. إن إعادة النظر في حكم القيمة (الأحكام التقديرية) هو خيار متاح دائمًا.

وفقًا لـ فريند Friend، فإن تجاهل الرياضيات غير الكاملة أو غير الناجحة يعد خطأً. وعلى حد تعبيرها: " **إذا أردنا، كفلاسفة، أن نفسر الرياضيات، فلابد وأن يتضمن جزء من التفسير سرداً للأخطاء والهفوات في الرياضيات. فضلاً عن ذلك، قد تكون الأخطاء صغيرة، ويمكن تصحيحها بسهولة، أو قد تكون كارثية(مثل عندما نكتشف أن نظريتنا تافهة).. ولكن حتى الأخطاء الكارثية تساهم في فهمنا للرياضيات. ويشهد على ذلك حقيقة مفادها أننا نتعلم من الأخطاء، ولا نطور نظريات رياضية جيدة إلا بعد ارتكاب الخطأ.**

هناك عدة طرق غير متكافئة لصنع نظرية رياضية جيدة تستند إلى حطام النظرية الأصلية. ومن ثم فإن الأهمية الفلسفية والتقنية لكل لكل طريقة تشكل مصدراً للنقاش.ومن هنا فإن عمل فريجه لم يكن مضيعة للوقت. فقد حقق قدراً من النجاح، ولكن ليس النجاح الذي كان يقصده. وربما نستطيع أن نطلق على هذا النوع من التعددية "**التعددية في النجاح"Pluralism in success، وهي وجهة النظر القائلة بأنه على الرغم من وجود مقاييس مختلفة للنجاح في الرياضيات، والتي يتم قبولها بشكل جيد في بعض الأحيان، فإن النظرية غير الناجحة (وفقًا للمقاييس الأولى) ناجحة بكل تأكيد . قد يكون هناك جوانب أخرى تكون فيها النظرية ناجحة للغاية، واستكشاف هذا الأمر يكون مثمرًا فلسفيًا في بعض الأحيان. (Friend,M:2014, P.28)**

في كتاب "فلسفة الرياضيات: قراءات مختارة"، الذي حرره كل من **بول بيناسيراف**[١٩] **Paul Benacerraf وهيلاري بوتنام Putnam**، مما يزيد من إثراء هذه الرؤية التعددية من خلال تقديم مجموعة واسعة من وجهات النظر الفلسفية حول الأسئلة الرياضية التأسيسية. تمتد هذه المجموعة من المناقشات بدءًا من الفلسفات التقليدية مثل المنطقية، والشكلية، والحدسية إلى المزيد من المناقشات المعاصرة حول الواقعية الرياضية ومناهضة الواقعية. يساهم كل منظور في التعددية الرياضية من خلال تقديم إجابات مختلفة على الأسئلة التأسيسية، مثل وجود الأشياء الرياضية وجودتها، وطبيعة الحقيقة الرياضية، ودور الإثبات الرياضي. كما لاحظ بيناسيراف وبوتنام في مقدمتهما:" **سيظهر أن نظريات الحقيقة والمعرفة في الفلسفة العامة كافية (أو غير كافية) من خلال قدرتها (أو عدم قدرتها) على تفسير المعرفة الرياضية؛ وفقط في فلسفة الرياضيات يجد المرء محاولات بحثية لتطبيق نظريات الحقيقة والمعرفة على الحالة الخاصة للرياضيات" (1983)**

هذا يسلط الضوءعلى الطبيعة المتشابكة للفلسفة الرياضية والاستفسارات الفلسفية العامة، مما يشير إلى أن الرؤى في المعرفة الرياضية يمكن أن تلقي الضوء على القضايا المعرفية والميتافيزيقية الأوسع. ويؤكد هذا الاعتراف بالوضع المعرفي الفريد للرياضيات على الفكرة التعددية القائلة بأن الرياضيات يمكن فهمها وممارستها بعدد لا يحصى من الطرق الصالحة والصحيحة على قدم المساواة.

في سياق المعرفة الرياضية، تؤكد التعددية الرياضية على فكرة أنه لا توجد نظرية رياضية واحدة "صحيحة " أو "أفضل". بدلًا من ذلك، يمكن أن تتعايش الأطر الرياضية المختلفة وتوفر وجهات نظر ورؤى وتطبيقات فريدة. تقول فريند في ذلك: " **يعتقد التعددي في نظرية المعرفة أن هناك طرقًا مختلفة لمعرفة المفاهيم الرياضية وأنه من غير الواضح، في ضوء الوضع الحالي، أن هناك أي شيء مثل التفسيرات النهائية أو المبررات أو المعرفة الكاملة في (وليس من) الرياضيات، أو تقارب فريد**

مـن نوعـه بشـأن "أفضـل" التفسـيرات أو المبـررات أو المعرفـة فـي الرياضـيات. (Friend, M: 2019, P. 347)

تعترف التعددية المنهجية بأن الأساليب والمناهج الرياضية المختلفة يمكن أن تكون مفيدة ومناسبة لمعالجة مشاكل أو ظواهر رياضية مختلفة. وتؤكد على تنوع التقنيات الرياضية وتشجع على استكشاف أساليب مختلفة لاكتساب رؤى وحل المشكلات. إن التعددي في المنهجية Pluralism in Methodology يتسامح مع استيراد تقنيات الإثبات والأساليب والنتائج من مجال رياضي إلى آخر. كما أنه لا يعارض الاقتراح القائل بأن التقنيات في التخصصات خارج الرياضيات يمكن أن تكون مفيدة للرياضيات وفلسفة الرياضيات[٢٠] .(Friend, M: 2014, P. 27)

بذلك، تتحدى التعددية الرياضية فكرة النهج الواحد المتجانس للمعرفة الرياضية. فهي تحتضن تنوع الأطر الرياضية والمبررات والأساليب، مع الاعتراف بإمكانية الوصول إلى الحقائق الرياضية من خلال طرق متعددة. ومن الناحية المعرفية، تتحدى وجهات النظر التقليدية للمعرفة الرياضية والطرق التي يتم بها تبرير الحقائق الرياضية. وتشير التعددية الرياضية إلى أنه يمكن أن تكون هناك طرق متعددة صالحة للحقيقة الرياضية. فبدلاً من طريقة واحدة موحدة للإثبات أو مجموعة واحدة من الافتراضات الأساسية، يمكن للأطر الرياضية المختلفة أن توفر طرقًا مميزة للتفكير والوصول إلى الحقائق. وهذا يتحدى فكرة وجود طريقة "صحيحة" أو "أفضل" واحدة للتعامل مع المشكلات الرياضية. تسلط التعددية الرياضية الضوء على أهمية التماسك والسياق والبراجماتية والاعتراف بأشكال متعددة من المبررات في فهم المعرفة الرياضية وتطويرها.

وفي ورقتها البحثية "**احتضان الأزمة في أسس الرياضيات**"، ترى فريند Friendأن احتضان تنوع الأسس اللغوية للرياضيات يعزز فهمنا وتطبيقنا للرياضيات.

من خلال الاعتراف بأنه لا توجد حقائق رياضية مطلقة بل حقائق مرتبطة بالنظرية. فتصرح بأن:

" الأزمة في أسس الرياضيات هي أزمة مفاهيمية. أقترح أن نتقبل الأزمة ونتخذ موقفاً تعددياً تجاه الأسس. هناك العديد من الأسس في الرياضيات. ومع ذلك، فإن عبارة "أساسات كثيرة" (لمبنى واحد) هي عبارة عن تناقض لفظي. ولذلك، فإننا نحول المفردات لنقول إن الرياضيات، باعتبارها تخصصًا واحدًا، تتكون من العديد من النظريات المختلفة. التعددية هي تعددية حول أسس الرياضيات، والتي يصر المدافع عنها على أن الحقيقة لا يمكن أن يكون لها معنى إلا في إطار نظرية رياضية. وهذا يعني أنه لا توجد حقائق رياضية مطلقة، بل هناك حقائق فقط ضمن النظرية. لا يوجد أنطولوجيا موحدة ومتسقة، فقط أنطولوجيا داخل النظرية ..." (Friend, M: 2013a, 27)

بالنسبة لمثل هذا التعددي، فإن النظرية الرياضية ليست صحيحة في حد ذاتها. لا يمكن أن تكون صحيحًا إلا بالإشارة إلى النظرية الوصفية (عادةً من خلال إظهار أنها مكافئة لتلك النظرية الوصفية أو قابلة للاختزال إليها). وهذا أمر مألوف في بنيوية شابيرو. يرتب هذا التعددي المناقشات في الرياضيات وحولها في تسلسل هرمي من النظريات والنظريات الفوقية، ويميز بين الادعاءات المقدمة داخل النظرية within a theory والادعاءات المقدمة حول النظرية about a theory، من وجهة نظر النظرية الفوقية a meta-theory. ومن هذا المنطلق، يكون التعددي حرًا في الاهتمام بالرياضيات كسلسلة من النظريات، حيث تحتوي كل منها على حقائق نسبية مرتبطة بتلك النظرية. أو يكون التعددي حرًا في التفكير في الرياضيات باعتبارها عملية، على النقيض من التركيز على الرياضيات باعتبارها مجموعة موحدة من الحقائق. (Friend, M:2013a, P.33)

تسلط التعددية الرياضية الضوء على أهمية التماسك والاتساق داخل الأطر الرياضية المحددة. فبدلاً من السعي إلى اتفاق عالمي أو أساس شامل واحد، تؤكد التعددية على التماسك والاتساق الداخليين لكل إطار. الحقائق الرياضية مبررة ضمن القواعد والافتراضات المعمول بها في كل إطار، ويصبح التماسك داخل هذا الإطار معيارًا مركزيًا لتقييم المعرفة الرياضية.

تتحدى التعددية الرياضية المفهوم التقليدي للموضوعية الرياضية من خلال التأكيد على الطبيعة السياقية للحقيقة الرياضية ووجود أطر رياضية متعددة صالحة. وبدلاً من ذلك، تصبح الحقيقة الرياضية سياقية، وتعتمد على الإطار الرياضي المختار وقواعده الداخلية. يمكن للنظريات الرياضية المختلفة أن تسفر عن حقائق مختلفة ضمن سياقاتها الخاصة. وبالتالي تؤكد التعددية على أهمية تحديد السياق أو الإطار عند تقديم الادعاءات حول الحقيقة الرياضية.

وبذلك تفتح التعددية الباب أمام التبريرات البراجماتية للمعرفة الرياضية. بدلاً من الاعتماد فقط على الإثباتات المنطقية المجردة، تعترف التعددية بقيمة الأدلة التجريبية والمحاكاة الحاسوبية والتطبيقات العملية في تبرير الادعاءات الرياضية. يمكن للاعتبارات البراجماتية، مثل فائدة أو فعالية الإطار الرياضي في حل المشكلات في العالم الحقيقي، أن تلعب دورًا في تقييم صحة وأهمية المعرفة الرياضية.

يمكن القول، أن التعددية الرياضية تتوافق مع التعددية المعرفية الأوسع نطاقًا، والتي تعترف بأن أشكال المعرفة المختلفة وطرق المعرفة يمكن أن تتعايش وتكمل بعضها البعض. وهي تعترف بأن المعرفة الرياضية يمكن اكتسابها من خلال طرق متنوعة، بما في ذلك الاستدلال الاستنباطي والملاحظة التجريبية والاستكشاف الحسابي وحتى الأفكار البديهية. يتحدى هذا المنظور التركيز التقليدي على الإثبات الاستنباطي كمصدر وحيد للمعرفة الرياضية.

مع التحول في المفردات من " النظرية التأسيسية" إلى "النظرية الشاملة"، فإننا نلفت الانتباه إلى التمييز بين تطلعاتنا الفلسفية والادعاءات الفلسفية التي يمكننا الدفاع عنها في الجدل. وهذا ما صرحت به فريند قائلاً: " **قد يأمل التعددي أن تتحول الرياضيات ذات يوم إلى مجموعة موحدة أو تحت مظلة نظرية واحدة، ولكن، وهذا أمر مهم، فإن مثل هذا الأمل هو مجرد شعور خاص شخصي، ولا يتم دعمه بالأدلة الحالية. وبالمثل، قد يأمل التعددي (وربما بشكل عكسي) أن يكون هناك العديد من النظريات الجامعة غير القابلة للاختزال في الرياضيات، وأنه لن يكون هناك أبدًا، ولا يمكن أبدًا، حتى من حيث المبدأ، أن تكون هناك طريقة لتوحيد هذه النظريات. مرة أخرى، هذا أمل واقتناع خاص. (Friend, M: 2013, 32-33)**

إن التعددي، باعتباره فيلسوفًا (عامًا)، هو ببساطة ملحد فيما يتعلق بمسألة توحيد الرياضيات؛ مع إجراء ما يلزم من تعديل لفكرة "حقيقة أو صدق" النظرية. لا توجد نظرية رياضية صحيحة تمامًا. لا يمكن للنظرية الرياضية أن تكون صحيحة إلا بالنسبة إلى نظرية أخرى (من خلال إظهار أنها قابلة للاختزال، أو قابلة للتضمين، في تلك النظرية). ما إذا كانت نظرية الاختزال صحيحة أم لا، سيعتمد مرة أخرى على نظرية اختزالية أخرى. في الواقع، بالنسبة للتعدديين، فإن محاولة تحديد حقيقة أو صدق النظرية، في غياب النظرية الفوقية، أو النظرية المختزلة، هي جهد ضائع. من المفيد مناقشة التضمينات والاختزالات وأدلة الاتساق المتساوية وغيرها من النتائج المحددة في نظرية رياضية أكثر إفادة من مناقشة حقيقة (صدق) النظرية.

وبناءً على مدى دقة التمييز بين المواقف التقليدية، فقد نتصور أن هناك عددًا كبيرًا من المواقف المحتملة المرشحة التي لم يتم تطويرها أو استكشافها بعد. ويبدو إذن أنه بدلاً من البحث عن أساس واحد للرياضيات، يتعين علينا أن نتعلم قبول فكرة وجود العديد من النظريات الشاملة، والعديد من المواقف التقليدية المحتملة، والعديد منها معقول؛ وبالتالي، لا يكون أي موقف تقليدي صحيحًا في القول بأن النظرية الكبرى

التي يدافع عنها تمثل "الرياضيات". وهذا يحفز على تعديل إضافي للغة. فبدلاً من الحديث عن النظرية الرياضية الحقيقية (أو الأساس)، يمكننا التحدث عن "نظريات شاملة معقولة". (Friend, M:2013a, P.34)

وعندما نستبدل " صدق النظرية" بـ "معقولية النظرية" تحدث بعض الأشياء المثيرة للاهتمام. نلاحظ أولاً أن "المعقولية" مصطلح نسبي. ومع ذلك، نادرًا ما تكون المواقف معقولة بنفس القدر. في بعض الأحيان، يكون أحد المواقف أكثر معقولية من الآخر على أساس فلسفة المنطق.

دلالات المنطق الكامنة وراء التعددية: حكم القيمة(الأحكام التقديرية)[٢١]

وبما أنه من الممكن أن تكون هناك تناقضات مستمرة، فإن التعددية تتطلب منطقًا شبه متسقًاParaconsistent Logic[٢٢]. يكون المنطق شبه متسقًا إذا كان غير تافه ويمنع الاستدلالات المتناقضة. وبما أن تطور المنطق شبه المتسق قد فصل مفهومي التناقض عن التفاهة (فمن الممكن أن يكون هناك الأول دون الثاني)، فإننا لدينا الحق في الادعاء بأننا نستطيع مناقشة التناقضات بشكل معقول، دون الانحدار إلى التفاهة أو السخف. وبالتالي تبدو معالجة التناقضات أكثر عقلانية من تلك التي في المنطق الكلاسيكي.

من خلال القول بأن التناقضات يمكن أن توجد بشكل متماسك داخل نظام منطقي، يعارض **بريست Priest** السعي التقليدي لأساس رياضي موحد وخالي من التناقض، ويدافع عن منطق تعددي حيث تتعايش أنظمة منطقية متعددة ومتساوية في انسجام. يقترح هذا النهج الرياضيات كمجموعة نابضة بالحياة من النظريات والأنظمة، التي يتم تحديد كل منها من خلال مجال قابليتها للتطبيق ومجموعة معايير للحقيقة، وبالتالي تتحدى النظرة المتجانسة للرياضيات وتتماشى مع مبادئ التعددية الرياضية.

يُعرف **بريست Priest** التعددية الرياضية بأنها: "**هي وجهة النظر القائلة بأن هناك مجموعة غير قابلة للاختزال من الهياكل الرياضية البحتة، ولكل منها منطقها الداخلي الخاص؛ وأن هذه الهياكل الرياضية البحتة كلها مشروعة على قدم المساواة**."**(Priest, G: 2024, P.1)**

يوفر المنطق شبة المتسق"مساحة العقل" الذي يمكن أن يحدث فيها النشاط الرياضي. إن التعددية كفلسفة تؤيد الموقف التعددي على حساب الفضائل الفلسفية الاخرى. يجمع الموقف التعددي بين مناهضة التأسيسية والاهتمام بالأسس – باعتبارها نظريات رياضية جيدة في حد ذاتها، و مصحوبة بفلسفات رياضية، والتي تؤثر على تطور الرياضيات.

يساعدنا إالمنطق على التمييز بين النظريات والأسس والفلسفات الرياضية والتفكير فيها. وتكمن فضيلة المنطق شبة المتسق في أنه من خلال استخدامه يمكننا التعامل مع التناقضات داخل النظريات وبينها، وهذا مهم للغاية.يعلق بايرز قائلًا: "**لن يكتمل أي وصف للرياضيات دون مناقشة علاقتها الدقيقة بالتناقض,Byers:2007 (p.81)**. إن الأمل الوحيد في الانخراط في مناقشة دقيقة هو من خلال استخدام منطق غير متسق، لأن المنطق الآخر بعيد كل البعد عن الدقة في هذا الصدد! ويعلق المؤلف نفسه لاحقًا: " **علاوة على ذلك، فإن المفارقة لها قيمة كبيرة أو عظيمة. وبالتالي، ينبغي لنا أن ننظر إلى المفارقة باعتبارها قوة مولدة داخل مجال الممارسة الرياضية. ... من أين تأتي هذه القوة والديناميكية؟ حسنًا، إنها تأتي من الغموض والتناقض والمفارقة. وبالتالي فإن هذه الأشياء ذات قيمة كبيرة. وهي بحاجة إلى الكشف عنها واستكشافها وتطويرها وليس استئصالها**." **(Byers: 2007, p.112)**

إن الغموض والمفارقة والتناقض أمر لابد من كشفه إذا أردنا أن نعطي وصفاً لممارسة الرياضيات وتطورها. وهذه المهمة اجتماعية نفسية إلى حد ما، ولكنها أيضاً مهمة فلسفية، لأنها تثير أسئلة معرفية تتجاهلها إلى حد كبير الفلسفات التقليدية

للرياضيات. فإذا كان بايرز Byers على حق، فإن تطوير الرياضيات يتم من خلال الوعي بالغموض والمفارقة والتناقض ومواجهتهما. وهذه كلها أدوات معرفية لتطوير أفكار رياضية جديدة، وليست قيوداً أو معايير صارمة مفروضة على التفكير أو على مجموعة الرياضيات.

في سياق التعددية الرياضية، يمكن للمنطق شبه المتسق أن يلعب دورًا في استيعاب واستكشاف النظريات والأطر الرياضية المتعددة التي قد يكون لها جوانب متناقضة. ويسمح بقبول التناقضات داخل سياقات أو مجالات محددة. من خلال تحديد السياقات التي تنشأ فيها التناقضات وتطبيق المنطق المتسق فقط داخل تلك السياقات، يمكن إدارة التناقضات دون التأثير على الإطار الرياضي بأكمله. إن هذا النهج يعترف بأن التناقضات قد توجد في مواقف معينة ولكن يمكن تجنبها أو حلها في سياقات أخرى.

وبناءً عليه، يوفر المنطق شبه المتسق إطارًا للتفكير في هذه التناقضات وإدارتها دون اللجوء إلى التفاهة. فهو يسمح بقبول الأقوال المتناقضة ما دامت لا تؤدي إلى انفجارات منطقية أو استخلاص جميع الأقوال. كذلك يتيح استكشاف النظريات الرياضية البديلة التي قد يكون لها افتراضات أو مبادئ متضاربة. فهو يسمح بدراسة النظريات التي لا تتفق مع المنطق الكلاسيكي، مما يوفر أداة للتفكير وإجراء استنتاجات ذات معنى ضمن تلك النظريات. وهذا يفتح المجال أمام إمكانية دراسة الأطر الرياضية التي قد يتم استبعادها تحت المنطق الكلاسيكي بسبب تناقضاتها الداخلية.

إن التعامل مع الصراعات والتناقضات الحتمية التي تظهر عند التفكير في مواقف فلسفية ونظريات رياضية مختلفة جدا تحت نظرية واحدة. يتعلق هذا الجزء بالتفكير في ضوء التناقض والصراع. تشير التعددية إلى منطق غير متسق كدليل للتفكير في الأفكار المتضاربة دون الحاجة بالضرورة إلى اتخاذ قرار بأن إحدى الأفكار صحيحة والأخرى ليست كذلك، أو أن أحد المواقف "يفوز" على الآخر. في بعض

الأحيان يفوز المرء، ولكن في الحجج الأكثر تعقيدًا، لن يكون هناك موقف صحيح بشكل واضح. فتقول فريند:

فلنأخذ منطقاً غير متسق "جاهزاً للاستخدام" ونضع أحكام القيمة موضع التنفيذ. إن التعددية تحظر الاستدلالات الزائفة من أجل استيعاب النظريات غير المتسقة الثنائية، والنظريات التافهة بالكامل. إن قيم الحكم الجديدة لدينا قادرة على استيعاب النظريات الناشئة، حيث يكون حكم "U" مفيداً. أما النظريات المتناقضة فهي تلك التي تصبح فيها أحكام ⊤ و ⊥ مهمة.

وتبرر فريند استحضارها لمثل هذا المنطق –رغم عدم اهتمامها بمنطق القضايا في حد ذاته– لاهتمامها بظاهرة فهم ما يجب فعله مع النظريات المتناقضة في الرياضيات، وكذلك العبارات المتناقضة في الرياضيات التي تنتمي إلى نظريات مختلفة تمامًا، وكيفية التعامل معها على أفضل وجه. فتقول: "ما يخبرنا به المنطق شبة المتسق، عندما نواجه تناقضًا مستمرًا هو أنه يمكننا التعامل معه على أنه مستمر (يستمر في التمتع بقيمتي الصدق، كما هو الحال مع نفيه) وأن التفكير الكلاسيكي لم يعد يعمل. كما نتعلم أن هناك منطقاً ما يعمل، أي أننا لا ننغمس على الفور في موقف تافه. وبالتالي، فإننا نشير إلى وجود مثل هذا المنطق لدعم الادعاء بأن التناقضات، في الكلام، أو الكتابة، أو في نظرية، أو بين النظريات، لا تستلزم بالضرورة التفاهة. " (Friend, M: 2014, P.119)

واحدة من الأفكار الرئيسة التي استكشفها **بريست Priest** هي مفهوم الاتساق. وهي دراسة النظم المنطقية التي يمكنها التعامل مع التناقضات بطريقة متسقة. إن استكشاف بريست للدياليثية Dialethism أو ما تعرف بـ" إزدواجية الصدق والكذب "، وقبول التناقضات الحقيقية. تتحدى الدياليثية المنطق الكلاسيكي من خلال اقتراح أن بعض التناقضات يمكن أن توجد دون التسبب في عدم الاتساق المنطقي. وبذلك يتقاطع عمل **بريست Priest** مع مفهوم التعددية الرياضية.

من الطبيعي أن ندرك أن أنشطتنا الفكرية لا ينبغي أن تؤدي إلى طرح نظريات أو ادعاءات متناقضة: بل ينبغي أن نحافظ على نظرياتنا وادعاءاتنا متسقة قدر الإمكان. وينبع الأساس المنطقي لهذا من قانون عدم التناقض. .يزعم بريستPriest أن هناك مواقف حيث توجد تناقضات حقيقية، وهذا يعني أن العبارة ونفيها يمكن أن يكونا صادقين في نفس الوقت. وفي سياق الرياضيات، تتحدى هذه الرؤية فكرة وجود إجابة أو حل صحيح واحد دائمًا لكل مشكلة رياضية. وهي تفتح المجال أمام وجود إجابات أو حلول متضاربة معًا واعتبارها صالحة. إن تطبيق الديالیثية داخل الأطر الرياضية يسمح بقبول بعض التناقضات باعتبارها عبارات صحيحة. ويمكن أن يؤدي هذا المنظور إلى رؤى جديدة وتفسيرات بديلة للمفاهيم والنظريات الرياضية.

إن قبول الديالیثية للتناقضات الحقيقية يدعو إلى إعادة تقييم المبادئ المنطقية التي تدعم التفكير الرياضي. إن المنطق التقليدي، القائم على مبدأ عدم التناقض، يستبعد التناقضات باعتبارها غير صالحة وغير متسقة. تتحدى الديالیثية المبدأ الكلاسيكي عدم التناقض، والذي ينص على أن العبارات المتناقضة لا يمكن أن تكون صحيحة في نفس الوقت

تتحدى الديالیثية مبدأ الوسط المستبعد، الذي ينص على أنه بالنسبة لأي عبارة، إما أن تكون صحيحة أو أن نفيها يكون صحيحًا، دون وجود حل وسط. في الرياضيات، غالبًا ما يتم الاعتماد على هذا المبدأ لإثبات صحة أو زيف الافتراضات الرياضية . تتحدى الديالیثية هذه المبادئ وتقترح أطرًا منطقية بديلة يمكنها استيعاب التناقضات الحقيقية. إن إعادة تقييم المبادئ المنطقية هذه لها آثار على فهمنا للمنطق الرياضي وموضوعية الحقيقة الرياضية.. ومع ذلك، فإن الديالیثية تسمح بإمكانية التصريحات التي تكون صحيحة وخاطئة في نفس الوقت، مما يقوض الانقسام الواضح بين الصدق والكذب ويعقد فهمنا للحقيقة الرياضية.

تتحدى الديالیثية الفهم التقليدي للحقيقة كمفهوم ثنائي حيث تكون العبارة إما صادقة أو كاذبة. كما أنها تقدم إمكانية أن تكون بعض العبارات الرياضية صادقة وكاذبة في نفس الوقت. وهذا يتحدى النظرة التقليدية للموضوعية الرياضية، والتي تعتمد على حقيقة واحدة عالمية مستقلة عن وجهات النظر أو التفسيرات الفردية. يمكن أن تساهم الديالیثية في نهج أكثر تعددية للرياضيات، حيث تعتبر الأطر أو التفسيرات الرياضية المختلفة صالحة. إذا تم قبول التناقضات الحقيقية، فإن هذا يفتح الباب لاستكشاف وجهات نظر وأطر رياضية متنوعة قد تسفر عن نتائج مختلفة ولكنها صالحة بنفس القدر. يتحدى هذا النهج التعددي فكرة وجود منظور أو إطار عمل واحد متميز يمثل الحقيقة الموضوعية في الرياضيات.

تدعم الديالیثية نهجًا أكثر تعددية للحقيقة الرياضية. إذا تم قبول التناقضات الحقيقية، فهذا يعني أن وجهات النظر أو التفسيرات المختلفة للبيانات الرياضية يمكن أن تكون صحيحة، حتى لو أدت إلى نتائج متناقضة. وهذا يتحدى الفكرة التقليدية المتمثلة في وجود حل أو إجابة واحدة صحيحة موضوعيًا في الرياضيات. وهو يشجعنا على تبني مناهج وأطر متنوعة، مع الاعتراف بصلاحيتها ضمن سياقاتها الخاصة. وبذلك يمكن أن تؤدي الديالیثية إلى تحول في فهمنا للحقيقة الرياضية من مفهوم مطلق مستقل عن السياق إلى مفهوم سياقي وعلائقي أكثر. قد تعتمد قيمة الصدق للقضية الرياضية على السياق أو الإطار أو التفسير المحدد الذي يتم النظر فيه. وهذا يتحدى فكرة الحقيقة العالمية والموضوعية في الرياضيات ويسلط الضوء على أهمية السياق والمنظور في تحديد الحقيقة.

تتحدى الديالیثية الأسس التقليدية للرياضيات من خلال التشكيك وإعادة تقييم بعض المبادئ والافتراضات الأساسية التي بنيت عليها الرياضيات. تتحدى الديالیثية المبادئ المنطقية التقليدية، مثل قانون عدم التناقض وقانون الوسط المستبعد. وهذا يتحدى الطبيعة الثنائية للصدق والكذب ويفتح إمكانية فهم أكثر دقة لقيم الصدق في

الرياضيات. يمكن أن تؤدي إعادة التقييم هذه للمبادئ المنطقية إلى تطوير أنظمة ومنطق رسمي جديد يستوعب التناقضات ويوفر أساسًا للاستدلال ضمن الأطر الجدلية. يمكن تطبيق الديالیثية لتحليل النظريات والأطر الرياضية غير المتسقة. فبدلاً من رفض أو نبذ النظريات التي تحتوي على تناقضات، تحتضنها الديالیثية باعتبارها جزءًا مشروعًا من المشهد الرياضي. يسمح هذا المنظور بإجراء فحص أعمق لآثار وعواقب النظريات غير المتسقة، مما قد يؤدي إلى رؤى ومفاهيم جديدة. يمكن للديالیثية أن توفر إطارًا للتوفيق بين المناهج الرياضية المتضاربة ظاهريًا وتحديد القواسم المشتركة بينها.

وبذلك، تتماشى الديالیثية مع وجهة النظر التعددية القائلة بأن النظريات والأطر الرياضية المختلفة يمكن أن تتعايش، حتى لو كانت تحتوي على عناصر متعارضة أو متناقضة. يمكن أن يؤدي هذا المنظور إلى تطوير مناهج تعددية في الرياضيات، حيث تتم دراسة نظريات أو أطر متعددة ودمجها. يمكن أن توفر الديالیثية أساسًا فلسفيًا للنظر في التفسيرات البديلة، والتوفيق بين النظريات المتضاربة، واستكشاف الروابط بين المناهج الرياضية المتباينة ظاهريًا.

إن مفهومي " الصدق والكذب" في نظرية رياضية ليسا ثنائية القيمة من الناحية الكلاسيكية. ولا ينبغي أن يكونا كذلك بالنسبة للتعدديين. يتم استبدال مفهوم "قيمة الصدق" التقليدي بمفهوم أكثر دقة وهو حكم القيمة. والدافع وراء هذا هو الفكرة البسيطة التي مفادها أنه بالنسبة للتعدديين لا معنى للقول بأن نظرية رياضية ما صادقة بحد ذاتها. ومن الأكثر إثارة للاهتمام، والأكثر إفادة، أن نقول إنها متسقة، أو أنها نظرية يمكن اختزال معظم الرياضيات فيها، أو أنها يمكن استخدامها لتحليل نظرية أخرى، ثم الكشف عن مشاكل مثيرة للاهتمام. وهذه الآلية في الحكم تحول ما كان في الماضي ادعاءً معياريًا إلى ادعاء وصفي.[٢٣] تكمن قوة هذا التحول في أن يكون أكثر دقة، ثم يسمح لنا بالانتقال إلى أحكام أخرى. (Friend,M:2013b,p.300)

إن الرغبة في أن نكون أكثر دقة في أحكامنا القيمية تتردد في بايرز. "إن الرياضيات تُعرَّف عادةً ببنيتها الشكلية بحيث يبدو من الغريب أن نؤكد أن فكرة ما [في الرياضيات] ليست صادقة ولا كاذبة. وما أعنيه [وليام بايرز] بهذا يشبه ما يعنيه ديفيد بوم Bohm عندما يقول "إن النظريات هي رؤى ليست صادقة ولا كاذبة، بل هي واضحة في مجالات معينة، وغير واضحة عندما تمتد إلى ما هو أبعد من تلك المجالات" (Bohm, D: 1980, P4). وعلى حد تعبير سينغ Singh: إن تصنيف الأفكار على أنها صادقة أو كاذبة ليس هو أفضل طريقة للتفكير فيها. قد تكون الأفكار خصبة؛ وقد تكون عميقة؛ وقد تكون دقيقة؛ وقد تكون تافهة. هذه هي أنواع السمات التي يجب أن ننسبها إلى الأفكار. إن وصف فكرة ما بأنها صادقة أو كاذبة قبل الأوان يجعل البيئة الرياضية جامدة. حتى الفكرة "الخاطئة" يمكن أن تكون قيمة. على سبيل المثال، قال جورو شيمورا ذات مرة عن زميله الراحل يوتاكا تانياما، "لقد كان موهوبًا بالقدرة الخاصة على ارتكاب العديد من الأخطاء، ومعظمها في الاتجاه الصحيح. "لقد حسدته على هذا وحاولت عبثًا تقليده، ولكن وجدت صعوبة كبيرة في ارتكاب أخطاء جيدة" (Singh :1997, p.174). الخطأ "جيد" على وجه التحديد لأنه يحمل في طياته فكرة رياضية مشروعة. (Byers: 2007, p.256- 257)

إذا استبدلنا قيم الصدق المطلقة التقليدية بحكم القيمة، فسنحصل على أدوات أكثر دقة يمكننا استخدامها في عملنا الفلسفي المتمثل في مقارنة وتقييم النظريات الفلسفية ومدى ملاءمتها للنظريات الرياضية الرسمية.

التحديات والانتقادات:

لقد حفزت التعددية الرياضية قدرًا كبيرًا من النقاش والتدقيق داخل فلسفة مجتمع الرياضيات. من خلال الدعوة إلى تنوع الممارسات والتفسيرات في الرياضيات، تواجه وجهة النظر هذه انتقادات فيما يتعلق بتماسكها الداخلي وأهميتها العملية وجوهر ما يشكل الحقيقة الرياضية. فضلًا عن بعض المفارقات المصاحبة لها.

أحد التحديات الرئيسة هو السؤال المعرفي حول كيفية تحديد حقيقة أو صحة الادعاءات الرياضية. إذا كانت هناك طرق متعددة صالحة، فكيف يمكننا تحديد المنهج الأكثر دقة وموثوقية؟ بدون معيار واضح لتقييم الصحة، يصبح من الصعب تقييم المعرفة الرياضية. كذلك يثير وجود مناهج متعددة صالحة مخاوف بشأن التناقضات المحتملة بين الأنظمة الرياضية المختلفة. وإذا أسفرت النهج المختلفة عن نتائج متناقضة، يصبح من الصعب التوفيق بينها أو دمجها. يمكن أن تقوض التناقضات تماسك وموثوقية الرياضيات ككل. إن وجود أنظمة أساسية متعددة يمكن أن يؤدي إلى عدم الاتساق أو عدم التوافق بين النظريات الرياضية.

ومع ذلك، تؤكد التعددية الرياضية أن هذه الاختلافات يمكن احتضانها واستكشافها، مما يوفر مشهدًا رياضيًا أكثر ثراءً ومرونة. تسلط التعددية الرياضية الضوء على أهمية التماسك والاتساق داخل الأطر الرياضية المحددة. فبدلاً من السعي إلى اتفاق عالمي أو أساس شامل واحد، تؤكد التعددية على التماسك والاتساق الداخليين لكل إطار. الحقائق الرياضية مبررة ضمن القواعد والافتراضات المعمول بها في كل إطار، ويصبح التماسك داخل هذا الإطار معيارًا مركزيًا لتقييم المعرفة الرياضية.

يجادل بعض النقاد بأن التعددية الرياضية يمكن أن تقوض الطبيعة الموضوعية والعالمية للرياضيات. وإذا كانت الأطر الرياضية المختلفة ذات البديهيات والاساليب المتناقضة تعتبر صالحة على قدم المساواة، يصبح من الصعب إنشاء أساس ثابت للمعرفة الرياضية. هذا يمكن أن يقوض موثوقية ودقة النتائج الرياضية.

يسلط **بيناسيراف Benacerraf** الضوء على الآثار المترتبة على وجود أسس متعددة للرياضيات على عالمية الحقيقة الرياضية. وهذا ما قدمته ورقتة المؤثرة، "ما لا يمكن أن تكون عليه الأرقام"، المنشورة في عام ١٩٦٥، تحديًا يُعرف باسم "معضلة بيناسيراف". تنشأ المعضلة من الملاحظة التي مفادها أن النظريات أو الأطر الرياضية

المختلفة يمكن أن تقدم تفسيرات صحيحة ومتسقة على قدم المساواة للأشياء الرياضية، مثل الأرقام. لقد أشعلت معضلة بن صراف مناقشات ومناظرات مستمرة داخل فلسفة الرياضيات. لقد حفزت استجابات ومقترحات مختلفة، مثل البنيوية والخيالية وغيرها، والتي تهدف إلى معالجة التحديات التي تفرضها التعددية وتقديم تفسير للمعرفة الرياضية غير المرتبطة بأطر محددة.

يرتبط التحدي الذي يواجهه بيناسيراف Benacerraf ارتباطًا وثيقًا بالجدل الدائر بين الواقعية الرياضية ومعاداة الواقعية. يسلط التحدي الضوء على الصعوبات التي يواجهها كلا الموقفين في تقديم وصف متماسك للمعرفة الرياضية وطبيعة الأشياء الرياضية، والذي يمكن إيجاز على النحو الآتي(٢٤):

الواقعية الرياضية هي الموقف القائل بأن الأشياء الرياضية موجودة بشكل مستقل عن الفكر البشري أو اللغة وأن البيانات الرياضية يمكن أن تكون صحيحة أو خاطئة بشكل موضوعي. يجادل الواقعيون بأن الكيانات الرياضية، مثل الأرقام أو المجموعات، لها وجود مستقل عن العقل ويتم اكتشافها بدلاً من اختراعها من قبل علماء الرياضيات. يمثل تحدي بيناسيراف Benacerraf صعوبة كبيرة في الواقعية الرياضية. إذا كانت الكيانات الرياضية لها وجود مستقل، فلا ينبغي أن تعتمد طبيعتها على النظام أو الإطار الصوري المستخدم لوصفها. ومع ذلك، يمكن لأطر رياضية مختلفة أن تولد حسابات صحيحة ومتسقة على حد سواء للأشياء الرياضية، مما يثير تساؤلات حول كيف يمكننا الحصول على معرفة بهذه الأشياء التي تتجاوز أطر محددة. يثير هذا التحدي مخاوف بشأن موضوعية المعرفة الرياضية وإمكانية الوصول إليها.

اللاواقعية الرياضية: تتخذ اللاواقعية الرياضية أشكالًا مختلفة ولكنها تنكر بشكل عام وجود الأشياء الرياضية المستقلة عن العقل. يجادل مناهضو الواقعية بأن

العبارات الرياضية لا تتعلق بعالم منفصل من الكيانات المجردة ولكنها بالأحرى اختراعات بشرية أو بنيات لغوية. يشكل تحدي بيناسيراف Benacerraf أيضًا صعوبات أمام مناهضة الواقعية. إذا كانت الأشياء الرياضية مجرد بنيات لغوية، يصبح من الصعب شرح فعاليتها في النظريات العلمية ودورها الواضح في تفسير العالم المادي. ويتمثل التحدي في تقديم تفسير لموضوعية وموثوقية المعرفة الرياضية دون التذرع بوجود كيانات رياضية مستقلة.

لقد عرضت فريند لبعض الانتقادات التي يمكن أن توجه إلى التعددية الرياضية، وتجملها في القول: "**إن التعددية في الأسس الرياضية تواجه العديد من المشاكل. وتشمل المشاكل، على الأقل: المفارقة، والنسبية المتفشية، وفقدان المعنى، والتعقيد الذي لا يمكن التغلب عليه، والشك المتزايد في قدرتنا على قول أي شيء ذي معنى عن الحقيقة والموضوعية في الرياضيات. والعديد من هذه المشاكل مرتبطة ببعضها البعض، ويمكن التغلب على العديد منها وتفسيرها وحلها من خلال التركيز على التدقيق والتركيبات ودقة الإثبات. علاوة على ذلك، وبصرف النظر عن كونها موقفًا يمكن الدفاع عنه، فإن هناك الكثير من المزايا للتعددية في الأسس. وتشمل هذه المزايا: الحساسية لممارسة الرياضيات، وتفسيرًا أكثر صدقًا لموضوعية الرياضيات وفهم أعمق للرياضيات.**

إن التعددي يتخلى عن الأفكار التقليدية المتعلقة بالحقيقة والوجود. وهذا أمر خطير؛ لأنه يهدد بعد استقرار النظرية. ولإضفاء الاستقرار على فلسفته، يستبدل التعددي الحقيقة والوجود بالدقة وغيرها من "الثوابت". الثوابت الرياضية هي أجزاء أو مفاهيم تظل ثابتة عبر النظريات من النظرية تظل ثابتة عبر زوج من النظريات، إنها شروط أساسية للتحقق المتبادل في الرياضيات. وتسمح لنا بإجراء الترجمات والمقارنات. ويمكن تحريكها في نهاية المطاف.

من وجهة النظر التعددية، أنه لا توجد حقائق رياضية مطلقة. كل الحقائق صحيحة فيما يتعلق بالبنية الرياضية. على سبيل المثال؛ ٢ +٢ = ٤ ليست حقيقة رياضية مطلقة، بل هي صحيحة في حساب بيانو. ولهذا السبب من الممكن وجود أكوان نظرية متنوعة تولد حقائق رياضية متنوعة. لكن هذا لا يعني أن «كل شيء مباح»، علينا الحذر من التفاهة ومبدأ الانفجار. يقوم التعددي بذلك بمساعدة التركيبات الرياضية والتحقق. التحقق المتبادل هو المصطلح المستخدم للتحقق من النظريات من فرع واحد من فروع الرياضيات في فرع آخر. الهدف هو محاولة إنتاج العديد من البراهين المتنوعة للنظرية، باستخدام أدوات رياضية متنوعة، وبالتالي جعل النظرية أكثر إقناعًا وأقوى.

التركيبات الرياضية هي مفاهيم نظرية تبقى ثابتة عبر زوج من النظريات. تعتبر التركيبات شرطًا مسبقًا لتكون قادرًا على التحقق من النظريات، فهي تشكل أساسًا يجعل من الممكن مقارنة النظريات. والتركيبات الرياضية التي يقترحها فريند هي: ١. دليل أو الإثبات الصارم٢. النماذج الثابتة٣. المفاهيم الثابتة ٤. والمعلومات الثابتة حول الأشياء عبر النظريات[٢٥]. يرى فريند أن التدقيق المتبادل يحل محل الحاجة إلى الحقيقة الرياضية المطلقة والأساس الرياضي. ومن خلال التدقيق في النظريات الرياضية المتنوعة يمكننا إيجاد الاستقرار والأمان ضد الهراء. أحد التفسيرات التقليدية لوجود التركيبات الرياضية هو أن جميع الرياضيات تنبع من نظرية تأسيسية.

التركيبات هي خصائص الأساس الذي بمجرد اكتشافه، سوف يستحوذ على كل الرياضيات. يجادل فريند بأنه ليس لدينا دليل يدعم هذا البحث عن النظرية التأسيسية، وأن التركيبات يجب أن يُنظر إليها على أنها دليل على التركيبات، وليس أي شيء آخر. قد يختلف بروتوكول الإثبات اعتمادًا على البنية الرياضية التي تستخدمها لتكوين برهانك. إذا كنت تعمل في ZF على سبيل المثال، فلن تتمكن من إنشاء برهان يستخدم بديهية الاختيار. غير أن تعريف البرهان الصارم هو برهان يتبع

من التعريفات والبديهيات المقبولة في البنية المقصودة. تشير النماذج الثابتة إلى النظريات التنظيمية فيما يتعلق بالهياكل ومعرفة الوظائف التي يمكن إنشاؤها بين الهيكلين. تشير المفاهيم الثابتة إلى المفاهيم الرياضية التي تظل ثابتة عند ترجمتها من بنية رياضية إلى أخرى، وبالمثل، للحصول على معلومات حول الأشياء عبر النظريات. (Friend, M: 2014, P.151-165)

تعتقد فريند أن التدقيق المتبادل في الرياضيات يعزز النتائج والنظريات الرياضية، وبالتالي يساهم في طابعها البيني الذاتي داخل المجتمع الرياضي. إنه ليس أداة لتقييم الحقيقة المطلقة ولكنه" يحل محل الحاجة إلى الحقيقة المطلقة، والوجود المطلق المستقل، والأساس أو التوجه الفردي"(Friend, M:2014, P.152) وبالضبط فشل أو نجاح التدقيق المتبادل هو الذي يضفي على النتائج الرياضية موضوعية أقل أو أكثر داخل مجتمع علماء الرياضيات. كما تشير فريند:

" وعلاوة على ذلك، فإن عملية التحقق المتبادل قوية لأنها صارمة. وهناك الكثير من السياقات حيث لا تنجح محاولات التطبيق المتبادل. وليس من الصحيح أن كل شيء في الرياضيات يتناسب مع بعضه البعض بأي طريقة نختارها، وفشل التطبيق المتبادل هو الدليل على موضوعية الرياضيات وعدم تفاهتها. وهذا النوع من الموضوعية لا يستند إلى علم الوجود. بل إن بعض حالات التوافق أو التقارب الناجحة هي دليل على بعض حالات التوافق والتقارب الناجحة، وليس أكثر من ذلك."(Friend, M: 2014, P.171)

وعلى هذا فإن الممارسات الرياضية تقيد المعرفة الرياضية، ولكن من خلال عملية التدقيق المتبادل تكتسب هذه المعرفة قدرًا أو أقل من الموضوعية. وهذا النوع من الموضوعية هو شكل ضعيف من أشكال الموضوعية (مقارنة بالشكل القوي للموضوعية التي تعتمد على الانطولوجيا والحقيقة المطلقة). وهي تعتمد على الوكلاء لأن الممارسات يقوم بها الوكلاء. وبالتالي فهو ليس مستقلًا عن الذات بالمعنى

المطلق. ومع ذلك، فإن الممارسات مشتركة بين علماء الرياضيات، وبالتالي ينبغي اعتبارها مستقلة جزئيًا عن الوكيل الفردي. وينطبق نفس الاستقلال على التدقيق المتبادل: فالتدقيق المتبادل يتم داخليًا(داخل الرياضيات) أو خارجياً(من خلال تطبيق الرياضيات في العلوم)، ولكنه موجه بالممارسات. وعلى هذا، فإن المعرفة الرياضية وفقًا لهذا المفهوم الضعيف للموضوعية ليست تعسفية ولا "ذاتية"على سبيل المثال، بالنسبة للفرد فقط.

ردًا على الانتقادات، يمكن القول بأن التنوع الإطار الرياضي ليس خطأً بل ميزة. يسمح هذا التنوع باستكشاف أكثر ثراءً للإمكانيات الرياضية ويعكس طبيعة الواقع المعقدة والمتعددة الأوجه. هذا من خلال رؤية الرياضيات باعتبارها بناءًا بشريًا يتطور ويتنوع استجابة للاحتياجات والمفاهيم المتغيرة. يمكن معالجة التحديات أيضًا من خلال تسليط الضوء على النجاح العملي لتطبيق نظريات رياضية متنوعة في مجالات مختلفة، من الفيزياء إلى علوم الكمبيوتر. فإن تطبيق علم الرياضيات غالبًا ما يتضمن اختيار الإطار الأكثر ملاءمة للمهمة المطروحة، مما يشير إلى أن التعددية ليست قابلة للحياة فلسفيًا فحسب، بل لا يمكن الاستغناء عنها عمليًا أيضًا.

باختصار، في حين تواجه التعددية الرياضية تحديات تتعلق بتماسك الرياضيات وموضوعيتها وآثارها الثقافية، فإنها تقدم نهجًا واعدًا لفهم عالم الرياضيات والتعامل معه. ومن خلال الاعتراف بتنوع الفكر الرياضي واستكشافه، تشجع التعددية منظورًا أكثر دقة وشمولاً وديناميكية حول الرياضيات وأسسها وتطبيقاتها.

في ورقتها " مفارقات التسامح ومفارقات التعددية المتعالية" تقدم **فريند Friend** ثلاثة أنواع من المفارقات التي تصاحب التعددية: المفارقة الخارجية، والداخلية، والمفارقة المتعالية[٢٦]. تعرف "ميشيل " المفارقات بأنها" **أفكار أو تصورات، يتم تمثيلها بجمل أو Wff والتي تبدو عند التحليل الأولي إنها (صادقة وكاذبة) على حد سواء .(Friend, M: 2014, P.175)**

المفارقة الخارجية The external paradoxon

تنشأ المفارقة الخارجية من أن التعددية متسامحة مع فلسفات الرياضيات الأخرى على الرغم من أنها قد لا تكون متسامحة مع التعددية. ونتيجة لذلك، فإن التعددية نفسها تواجه مفارقة، حيث يبدو أنها تشير إلى الاعتقاد بأنها فلسفة معقولة للرياضيات وأنها في حد ذاتها ليست فلسفة مناسبة للرياضيات. الاقتراح الأول واضح إلى حد ما لأنه إذا كانت الفلسفة لا تقترح الإيمان بذاتها فمن الأفضل أن تكون غير موجودة. يتم الحصول على الاقتراح الثاني من خلال ملاحظة أن التعددية تتسامح مع فلسفات الرياضيات الأخرى التي تقول بأنها هي نفسها الفلسفة الحقيقية الوحيدة للرياضيات. لذلك، قد تجادل هذه الفلسفات الأخرى بأن التعددية هي فلسفة خاطئة، ولأن التعددية تتسامح مع ذلك، يبدو أنها تواجه مفارقة تتمثل في القول بأنها فلسفة معقولة وفي نفس الوقت ليست كذلك.

تقترح **فريند Friend** حل هذه المفارقة من خلال، أولاً، الاعتراف بأن التسامح تجاه تصريحات الفلسفات الأخرى لا يعني ضمناً صحتها، وثانياً، تقديم اللاأدرية التعددية تجاه البيانات الدوغمائية في الفلسفات الأخرى التي تحاول التعددية التسامح معها. يُقصد باللاأدرية بمعنى "لا أعرف" (وليس "لا أهتم") هنا وهي مفتوحة للتقدم: إذا كان علينا في وقت ما أن نصادف حجة جيدة لأن الفلسفة هي الفلسفة الحقيقية حقًا (بما في ذلك تصريحاته العقائدية) يتمتع التعددي بالحرية في تغيير وجهة نظره بسهولة لأنه أصبح الآن لا أدريًا بشأن هذه التصريحات. ومع ذلك، عند اتخاذ هذا الموقف الجديد، عليه أن يضع في اعتباره أنه كان تعدديًا في السابق، وإذا كانت هناك حجج معقولة ضد موقفه الجديد في مرحلة ما، فيمكنه التراجع واتخاذ النهج التعددي مرة أخرى. على وجه الخصوص، سيكون لا أدريًا بشأن جميع العبارات العقائدية مرة أخرى. كتبت **فريند:**

" إن الحل يتضمن دقة إضافية، فهو ليس حلاً مخصصًا للتعدديين فحسب، بل أن التعدديين لا يحتاجون حتى إلى الإصرار على أن التعصب (الذي تتسم به المواقف المتنافسة) غير صحيح. يكفي أن نظل لا أدريين، وأن نصر على الصدق العلمي: فما لم يكن لدينا المزيد من الأدلة على صحة الموقف العقائدي، فإننا نظل تعدديين. وإذا ما ظهرت مثل هذه الأدلة، فمن الصحيح بالطبع أن نتخلى عن التعددية. وتذكر أن التعددية تتضمن لا أدرية مبدئية وليس لا أدرية متعصبة" (Friend, M:2014, P. 178)

المفارقة الداخلية The internal paradoxon

تظهر المفارقة الداخلية عندما نأخذ في الاعتبار أن التعددية ترفض الدوغمائية، ولكنها في الوقت نفسه تريد أن تنظر بجدية إلى الفلسفات الأخرى، وبالتالي، وضعت بعض البروتوكولات والمواقف التي اعتادت على القيام بذلك. ومع ذلك، يبدو أن هذا يؤدي بشكل مباشر إلى كون التعددية عقائدية (في البروتوكولات والمواقف المستخدمة عند النظر إلى الفلسفات الأخرى).

لحل هذه المفارقة تقترح **فريند Friend** ببساطة التمييز بشكل صارم بين العقيدة doxa، وهو عبارة عن مجموعة مطلقة من القواعد يجب أن يُنظر إليها على أنها صحيحة دون أي تفكير، كما يُعتقد أنها حقيقة في أي وقت قادم. والمعيار الذي يُعتقد أنه موقف مشترك تجاه شيء يمكن تقييمه وإعادة صياغته/تجديده في أي وقت، وعلى وجه الخصوص، ليس ثابتًا، ولكن كما قيل من قبل مجرد ممارسة شائعة. وبما أن هذه البروتوكولات والمواقف التي يستخدمها التعدديون تعتبر في رأيها معايير، فقد تم حل المفارقة الداخلية على الفور. وعلى حد تعبير فريند:

" يسطيع التعددي أن يدافع عن نظرية أو فلسفة لأنه يرى البرتوكول وادعاءات "الواجب" على أنها معايير، وليس دوغمائية أو مطلقة... والمعايير

الخاصة مشتركة بين الممارسة الفلسفية. ولهذا السبب فإن العديد من الفلاسفة يوافقون عليها (وهم تعدديون تمامًا دون علمهم) وسوف يوافقون على البروتوكول باعتباره معايير وليس دوكسا... إذا نظرنا إلى الأمر بهذه الطريقة، فإن تسامحنا الداخلي المتناقض الذي يهددنا يتحول إلى شيء مبتذل. فعندما نناقش نظرية أو فلسفة، يتعين علينا أن نحافظ على بعض الأهداف ثابتة، وقد نراجع هذه الأهداف واحدة تلو الأخرى، أو حتى عدة أهداف في كل مرة. ومن حيث المبدأ، يمكننا التشكيك في أي شيء، حتى البديهيات التي ترتكز عليها نظرية رياضية أو برتوكول، ولكن ليس من الممكن التشكيك في كل شيء دفعة واحدة وفي كل الأوقات، وهذا من شأنه أن يُعد سلوكًا غير منضبط، وهو أمر غير عملي." (Friend, M:2014, P.181)

وهكذا، فمن خلال الاستعانة بالتمييز بين المعيارية والجمود، يتجنب التعددي الاتهام بدعوة مفارقة داخلية غير قابلة للحل. ومع ذلك هناك مفارقات أكثر خطورة، والتي لا يمكن حلها بسهولة. ولحلها، نلجأ إلى الدياليثية. والتعددي الدياليثي هو تعددي مع منطق متناقض ترتكز عليه تعدديته.

المفارقة المتعالية (التجاوزيةThe transcendental paradoxon)

تتعلق المفارقة التجاوزية بحقيقة أن التعددية ترغب في أخذ جميع فلسفات الرياضيات على محمل الجد. بافتراض ذلك واستخدام مخطط الاحتواء، فإننا نواجه تناقضًا، نظرًا لأن مجموعة جميع مجموعات الخصائص في فلسفة الرياضيات ستحتاج إلى أن تكون مزيجًا من الخصائص الموجودة في فلسفات الرياضيات (التعالي) وفي نفس الوقت لا يمكن أن يكون مثل هذا الجمع (الإغلاق). باختصار، المفارقة هي أننا نستطيع دائمًا العثور على فلسفة تعددية تحتوي على الفلسفة التي لدينا الآن، ولكنها أكبر تمامًا. ولذلك، لا توجد فلسفة تعددية عالمية للرياضيات.

تقترح فريند Fiend حل هذه المفارقة بالقول إن لدينا فلسفة تعددية في وقت ما، ويمكننا أو حتى ينبغي علينا إعادة النظر فيها، بمعنى أننا يجب أن نسأل أنفسنا ما إذا كان الوقت قد حان لتوسيعها بانتظام أم لا. ومع ذلك، فهي تجادل أيضًا بأن النية ستبقى دائمًا كما هي: تقييم جميع الفلسفات المقترحة للرياضيات، وبالتالي، فمن المنطقي التمسك بالفلسفة التعددية من خلال رؤيتها ببساطة على أنها فلسفة ليست بالضرورة ثابتة بمرور الوقت. فتقول:

" يمكننا أن نفكر في التعددية العالمية باعتبارها فلسفة متنامية بشكل ممتد. إنها ليست، على الرغم من كل ذلك، متنامية بشكل مقصود. النية ثابتة، أي أن التعددية العالمية هي نية للترفيه عن وتقييم أي فلسفة مقترحة للرياضيات، بما في ذلك تلك المصنوعة من مزيج من الفلسفات الآخرى. لا يمكن إكمال المهمة، ولا يمكننا أبدًا التوصل إلى قرار نهائي. أفضل ما يمكن أن نأمله هو الاستقرار النسبي." (Friend, M: 2014, P185)

ولهذا السبب فإن التعددية العالمية ليست فوضوية كما تبدو للوهلة الأولى، وذلك لأنها تأخذ الوقت الكافي لتطوير وتقييم الفلسفات. وبالتالي، تتمتع في أي وقت من الاوقات باستقرار نسبي. وليس من الممكن أن يكون أي شيء مباحًا. وعلى حد تعبير فريند:

"إننا نبني وندرس المواقف التي لها بعض النسب، والمواقف التي تبنتها جماعة فلاسفة الرياضيات. إننا نبني على أكتاف بعضنا البعض، وليس من فراغ. إن البناء والتقييم يحدثان داخل المجتمع، وبالتالي، لتطوير استعارة الفوضى، فإننا لا نملك الفوضى، بل الفوضوية، أي المجتمع المنظم ذاتيا. وبالتالي، لدينا الخيار، بل والقيود، لحصر بحثنا. إن وضعنا التاريخي، ومحدوديتنا، والعدد القليل من الناس في المجتمع، كل هذا يعمل على كبح جماح التعددية العالمية، لذا لا ينبغي لنا أن نعتبرها تهديدًا".(Friend, M: 2014, P186)

نتائج الدراسة

هناك العديد من النتائج التي تم التوصل إليها من خلال هذه الدراسة، من أهمها:

١- أن التعددية هي النظرية الأكثر فائدة في فلسفة الرياضيات استجابة للأزمة التأسيسية للرياضيات. ويتضح ذلك من خلال مناقشة الفلسفات الرئيسة في فلسفة الرياضيات: الواقعية، ومناهضة الواقعية، وتبين أن أياً منها ليس مناسباً كنظرية تأسيسية. وأن التعددية تمنحنا أفضل تفسير للرياضيات كما تمارس، وتعطي أفضل بداية ممكنة للبحث والإبداع الرياضي في المستقبل. ينبغي إعادة النظر في المشروع التأسيسي، بمفهومه الفلسفي، ببساطة لا يوجد دليل على نوع الأسس التي كان الفلاسفة يبحثون عنها: أساس يوفر جوهرًا أو وجودًا أو حقيقة مطلقة لكل الرياضيات.

٢- توفر التعددية الرياضية إطارًا لفهم المنهجيات والفلسفات المتنوعة التي تقوم عليها الممارسة الرياضية وتدعو إلى مفهوم أوسع لما يمكن أن تكون عليه الرياضيات. لا يسعى هذا النهج إلى تخفيف الدقة أو التقليل من الإنجازات في الرياضيات؛ بل يهدف بدلاً من ذلك إلى الاحتفال بالتنوع المتأصل في التخصص وتنميته. بينما نواصل استكشاف طيف الرياضيات مع استمرارنا في استكشاف طيف الفكر الرياضي، فإننا نتذكر الإمكانات اللامحدودة التي تكمن في احتضان التعددية – ليس فقط في الرياضيات ولكن في جميع مجالات الاستقصاء البشري.

٣- من خلال منظور التعددية، لا يتم الكشف عن الرياضيات باعتبارها كتلة واحدة، بل كمجال معقد من المناظر الفكرية المتنوعة والمتضاربة أحيانًا. يقدم كل منظور وجهات نظر فريدة من نوعها، ويدعو إلى أن القوة الحقيقية للرياضيات تكمن في طبيعتها المتنوعة بدلاً من الهوية الموحدة. يعكس هذا التحول مناقشات فلسفية أوسع حول الواقع والحقيقة ونظرية المعرفة، مما يضع الرياضيات عند نقطة التقارب المحورية بين التفكير المفاهيمي والبحث التجريبي.

٤- إن تقييم الممارسات والنظريات الرياضية المتنوعة ودمجها يفتح الباب أمام مستقبل تزدهر فيه الرياضيات باعتبارها مجالًا نابضًا بالحياة ومتعدد الأوجه، مما يعكس تعقيد العالم الذي تسعى إلى فهمه. وفي نهاية المطاف، يشمل طيف الفكر التعددية الرياضية هو شهادة على ثراء المسعى الفكري البشري. إنه يذكرنا بأن الرياضيات، مثل جميع أشكال المعرفة، هي مسعى إنساني عميق – يتشكل من خلال فضولنا، وثقافاتنا، ورغبتنا الجماعية في فهم الكون. وبينما نحتضن تعددية الفكر الرياضي، فإننا نحتضن أيضًا الروح الإنسانية المشتركة التي تدفعنا إلى الاستكشاف والتساؤل والاكتشاف.

٥- يُظهر التحقيق في المشهد المعقد للتعددية الرياضية عالمًا يزدهر فيه التنوع في التفكير والمنهجية. يغطي هذا الاستكشاف موضوعات مختلفة، بدءًا من القواعد الفلسفية التي تدفع الاستكشاف الرياضي إلى المنهجيات المتنوعة والأطر المفاهيمية المطبقة في مختلف المجالات الرياضية، والتي تبلغ ذروتها في سرد موحد. يكشف هذا مدى الإبداع والابتكار في الرياضيات، ويوضح كيف يؤدي دمج وجهات نظر متنوعة إلى فهم ديناميكي ومترابط ومعزز للموضوع. ويمتد الهدف إلى ما هو أبعد من مجرد فهرسة مجموعة الأفكار داخل التعددية الرياضية إلى الدعوة إلى أن هذا التنوع هو حجر الزاوية للقوة والحيوية في هذا المجال.

٦- إن الموقف التعددي يهدف إلى تقديم نظرية فلسفية لدعم ما يحدث بالفعل في فلسفة الرياضيات. وعلى هذا فإن الموقف "جديد" بمعنى أنه لم يتم التعبير عنه بهذه الطريقة بعد في المطبوعات، ولكنه "قديم" بمعنى أنه تم تنفيذه وفهمه بالفعل، على مستوى ما، من قبل بعض علماء الرياضيات وفلاسفة الرياضيات.

٧- في حين أن الدياليثية يمكن أن يكون لها آثار على التعددية الرياضية، في فتح طرق جديدة لاستكشاف حدود وإمكانيات الفكر الرياضي، فإن هذه المفاهيم ليست متشابكة بطبيعتها. يمكن أن توجد التعددية الرياضية بشكل مستقل عن الدياليثية ويمكن أن تشمل مجموعة أوسع من وجهات النظر، بما في ذلك تلك التي لا تقبل

التناقضات الحقيقية. أن الديالیثية هي مجرد منظور واحد ضمن التعددية الرياضية وقد لا تكون مقبولة عالميًا أو مطبقة في جميع السياقات. يعتمد اعتماد الديالیثية ضمن التعددية الرياضية على الأهداف والافتراضات والتفسيرات المحددة للنظريات الرياضية التي يتم النظر فيها. تسمح الديالیثية بالاستكشاف الفلسفي لإمكانية وجود تناقضات حقيقية في الرياضيات ويمكن أن تساهم في المناقشات والمناظرات المستمرة المحيطة بالتعددية الرياضية.

٨- تتقاطع التعددية الرياضية بعمق مع المناقشات الطويلة الأمد في فلسفة الرياضيات حول طبيعة الأشياء الرياضية، وأسس الرياضيات، وموضوعية المعرفة الرياضية، ودور القيم في الرياضيات، وطبيعة الممارسة الرياضية. يتطلب التنقل بين هذه الروابط تحليلًا فلسفيًا دقيقًا للأحكام القيمية المعنية. وهي تشجع الفلاسفة على استكشاف تنوع النظريات الرياضية والنظر في الآثار المترتبة على اعتماد أطر تأسيسية مختلفة.

٩- تشير التعددية الرياضية إلى عدم تفرد الواقع الرياضي، أي أنه لا يوجد واقع رياضي واحد فريد موجود بشكل مستقل عن الفكر البشري أو التحقيق. وبدلاً من ذلك، يُنظر إلى الواقع الرياضي على أنه متعدد الأوجه، مما يسمح بوجود أطر رياضية متعددة متماسكة ومتسقة داخليًا. يلتقط كل إطار جوانب معينة من الواقع الرياضي، ولكن لا يمكن لأي منها أن يمثل النطاق الكامل للظواهر الرياضية بشكل كامل. تعني التعددية وجود عوالم رياضية متعددة متعايشة، كل منها تحكمه قواعده وافتراضاته الداخلية. قد يكون لهذه العوالم هياكل رياضية أو بديهيات أو التزامات وجودية مختلفة. على سبيل المثال، في أحد العوالم الرياضية، قد تصمد الهندسة الإقليدية، بينما في عالم آخر، تسود الهندسة غير الإقليدية. تسمح التعددية باستكشاف وتطوير عوالم رياضية مختلفة دون الحاجة إلى أن يكون أحدها متفوقًا أو أكثر جوهرية من الآخرين.

١٠- في سياق التعددية الرياضية، تُشير الأحكام القيمية إلى الاعتراف بأن القيم والتفضيلات الذاتية يمكن أن تؤثر على اختيار وتقييم وتفسير الأطر والمناهج الرياضية. وهي تعترف بأن الاحكام الرياضية ليست موضوعية بحتة ولكنها يمكن أن تتأثر بالعوامل الشخصية والثقافية والاجتماعية. إن التعرف على أحكام القيمة في الرياضيات يسلط الضوء على العنصر البشري المشارك في الممارسة الرياضية والجوانب الذاتية التي يمكن أن تلعب دورًا. يمكن لاحكام القيمة أن تظهر بطرق مختلفة: قد يختار علماء الرياضيات العمل ضمن أطر رياضية محددة بناءًا على قيمهم وتفضيلاتهم. وقد ينجذبون إلى أطر تتماشى مع حساسيتهم الجمالية، أو ميولهم الفلسفية، أو خلفياتهم الثقافية. كذلك يمكن لأحكام القيمة أن تؤثر على كيفية تقييم علماء الرياضيات لمزايا النظريات أو المناهج الرياضية المختلفة. يمكن أن تمتد أحكام القيمة في التعددية الرياضية إلى ما هو أبعد من ذلك. قد يفكر علماء الرياضيات في الآثار الاجتماعية أو الأخلاقية لعلمهم ويتخذون الخيارات وفقًا لذلك. وقد يعطون الأولوية للأبحاث التي لها تطبيقات عملية، أو تعالج التحديات المجتمعية، أو تتماشى مع قيمهم الأخلاقية... من المهم ملاحظة أن أحكام القيمة في التعددية الرياضية لا تقوض موضوعية ودقة الرياضيات. لا تزال الأطر والأساليب الرياضية تخضع للاتساق المنطقي والتماسك والتحقيق التجريبي. يتم أخذ أحكام القيمة في الاعتبار جنبًا إلى جنب مع هذه المعايير الموضوعية وتساهم في تنوع وجهات النظر والممارسات الرياضية.

١١- في المضي قدمًا، يواجه مجتمع الرياضيات التحدي المتمثل في موازنة التوترات بين التعددية والأحادية، والتنوع والتوحيد، والابتكار والتقاليد. لا يمكن المبالغة في تقدير إمكانات التعددية الرياضية في تعزيز نهج أكثر شمولاً وإبداعًا ومتعدد التخصصات لتعليم وأبحاث الرياضيات. من المهم أن ندرك أن التعددية هي عملية أو موقف مستمرة ومتغيرة، وقد يتطلب التعامل مع تحدياتها ومخاوفها الاستمرار في تطوير الفهم والمهارات والأدوات اللازمة للتفاعل بشكل فعال ومثمر مع

الأشخاص والثقافات المختلفة في حين أن تعزيز التعددية في مجتمع الرياضيات يجلب فوائد عديدة، إلا أن هناك أيضًا تحديات وقيود يجب أخذها في الاعتبار. وهنا بعض منها، مع اقتراح كيفية مواجهتها:

- قد تكون المجتمعات الرياضية التقليدية مقاومة لاحتضان التعددية. قد يكون بعض علماء الرياضيات راسخين بعمق في منهجيات أو نظريات أو مواقف فلسفية محددة، مما يجعل قبول مناهج بديلة أمرًا صعبًا. إن التغلب على هذه المقاومة يتطلب الانفتاح والحوار والرغبة في إجراء فحص نقدي للممارسات القائمة.
- قد يكون من الصعب دمج المناهج الرياضية المتنوعة في كل متماسك. قد يكون لكل نهج مجموعته الخاصة من المفاهيم والأساليب والشكليات، مما يجعل من الصعب العثور على روابط وإنشاء ترجمات فيما بينها. يتطلب سد الفجوات بين الأطر المختلفة وتطوير فهم شامل للرياضيات ككل جهدًا وأبحاثًا كبيرة.
- يتطلب تبني التعددية الرياضية في التعليم تحولاً في الأساليب التربوية. ويعني تعريض الطلاب لمجموعة واسعة من وجهات النظر الرياضية وتشجيعهم على التحليل النقدي وتقييم الأساليب المختلفة. قد يمثل هذا تحديًا للمعلمين، لأنه يتطلب فهمًا أعمق للأطر الرياضية البديلة والقدرة على توجيه الطلاب من خلال استكشاف منهجيات متنوعة.
- يتطلب تعزيز التعددية الرياضية إجراء تغييرات في تعليم الرياضيات والتدريب عليها. غالبًا ما تركز المناهج التقليدية على نطاق ضيق من المواضيع والمنهجيات، مما قد يعيق تطوير مجتمع رياضي متنوع وشامل. يتطلب دمج الأساليب التعددية في التعليم إصلاح المناهج الدراسية، وتدريب المعلمين، وإدراج وجهات نظر.

الهوامش

(١) ومن أمثلة المواقف التي تتبناها فلسفات الرياضيات المختلفة: الاقتصاد الوجودي، واحترام ظاهراتية الرياضيات، واحترام آراء علماء الرياضيات، والبساطة، وما إلى ذلك. وقد يُحكم على بعض المواقف بأنها فضيلة أو رذيلة، اعتمادًا على الفلسفة.

(٢) ميشيل فريند: فيلسوفة كندية ولدت في ٣٠ يوليو ١٩٦٦ مونتريال، كيبيك. كندا. وهي ابنة أنتوني وهنريت فريند، أستاذ الفلسفة بجامعة جورج واشنطن، متخصصه في مجالات فلسفة الرياضيات والمنطق، ونظرية المعرفة والميتافيزيقا وغيرها.. حاصلة على الماجستير من جامعة ماجيل بكندا، في موضوع The Possibility of Frege's Logicism وحصلت على الدكتوراه من جامعة سانت أندروز في موضوع Second Order Logic is Logic ..لها العديد من الكتب والمقالات المنشورة على سبيل المثال:

- Introducing Philosophy of Mathematics (2007)
- luralism in Mathematics (2014)
- Varieties of Pluralism and Objectivity in Mathematics" (2019)
- Remarks of a Philosopher of Mathematics and Science (2018)

https://philosophy.columbian.gwu.edu/michele-friend

https://prabook.com/web/michele.friend/638660#google_vignette

(٣) جراهام بريست، فيلسوف وعالم منطق وأستاذ متميز للفلسفة في مركز الدراسات العليا بجامعة مدينة نيويورك.. وهو معروف بدفاعه عن الجدلية، وتحليلاته المتعمقة للمفارقات المنطقية، وكتابة العديد من الكتابات المتعلقة بالمنطق اللامتسق Paraconsistent logic وغيره من المنطق غير الكلاسيكي.

https://en.wikipedia.org/wiki/Graham_Priest

(٤) إن مصطلح"الدياليثية" أو ازدواجية الصدق، صاغه كل من "جرهام بريستGraham Priest "، و"ريتشارد روتلى Richard Routley" عام ١٩٨١. وقد كانت كتابات "فتجنشتين Ludwig Wittgenstein(1889-1951)" المنطقية مصدر إلهام لصياغة ذلك المصطلح خاصة عباراته

التى ضمنها كتابه "ملاحظات حول أصول الرياضيات Remarks on Foundations of Mathematics " حين وصف الجملة الكاذبة بأنها " الجملة التي لا تعد صادقة".

(http://plato.stanford.edu/entries/dialetheism) Grim, 2004, p.46)

(٥) ستيوارت شابيرو، أستاذ الفلسفة في جامعة أوهايو، وهو شخصية بارزة في فلسفة الرياضيات. حصل على درجة الماجستير في الرياضيات عام ١٩٧٥، والدكتوراه في الفلسفة عام ١٩٧٨، وكلاهما من جامعة ولاية نيويورك في بوفالو.

https://philosophy.osu.edu/people/shapiro.4

(٦) الأساس هو نظرية رياضية مقدمة بشكل بديهي (بديهيًا) يمكن اختزال كل أو معظم الرياضيات الناجحة الحالية. ويمكن استخدامها بشكل معياري لاستبعاد أي رياضيات مزعومة لا يمكن إرجاعها أو اختزالها إلى النظرية البديهية من الرياضيات الحقيقية.(Friend, M:2014, P.8)

(٧) بينيلوبي مادي: فيلسوفة أمريكية، وأستاذة متميزة في علم المنطق وفلسفة العلوم والرياضيات في جامعة كاليفورنيا، إرفاين. معروفة بعملها المؤثر في فلسفة الرياضيات حيث عملت على الواقعية الرياضية (خاصة نظرية المجموعات) وطبيعانية الرياضيات أو الطبيعية الرياضية .. ttps://en.wikipedia.org/wiki/Penelope_Maddy

(٨) نيكولاس بورباكي Nicolas Bourbaki هو الاسم المستعار الجماعي لمجموعة من علماء الرياضيات، معظمهم من خريجي المدرسة العليا الفرنسية تأسست في عامي ١٩٣٤-١٩٣٥ وكان هدفها في الأصل إعداد كتاب مدرسي جديد في التحليل. بمرور الوقت أصبح المشروع أكثر طموحًا، حيث نما إلى سلسلة كبيرة من الكتب المدرسية المنشورة تحت اسم بورباكي، والمقصود منها معالجة الرياضيات البحتة الحديثة.

https://en.wikipedia.org/wiki/Nicolas_Bourbaki

(٩) لقد ذهبت تعددية فيتجنشتاين إلى حد الإدعاء بأن التناقض لا يبطل النظام الرياضي، طالما أن التناقض لا يقودنا إلى مشاكل(إما لأن نتائج التناقض غير ذات أهمية، أو لأننا نعرف كيفية تجاوز التناقض حتى لو لم نتمكن من صياغة كيفية قيامنا بذلك صوريًا. انظر

Wittgenstien,L: 1976, chapter21-22

(١٠) للمزيد من التفاصيل حول مماثلة بريست بين التعددية الرياضية والتعددية في الألعاب، يمكن الرجوع إلى (Priest, G:2013, 6-7)

(١١) روبن هيرش: هو عالم رياضيات وفيلسوف أمريكي معروف بعمله في فلسفة الرياضيات. في كتابة"ما هي الرياضيات حقًا"الصادر عام ١٩٩٧ درس نقديًا المواقف الفلسفية المختلفة حول طبيعة الرياضيات، بما في ذلك،الافلاطونية والشكلية، والحدسية.

(١٢) لقد أدى اكتشاف الأشكال الهندسية غير الإقليدية (في القرن التاسع عشر) إلى تقويض الادعاء القائل بأن الهندسة الإقليدية هي الهندسة الحقيقية الوحيدة، وأدى بدلاً من ذلك إلى تعدد الأشكال الهندسية التي لا يمكن القول (دون تحفظ) بأنها "أصدق" من غيرها. وعلى نحو مماثل، زعم كثيرون أن اكتشاف الاستقلال الناتج عن الحساب ونظرية المجموعات (في القرن العشرين) قد قوض الادعاء القائل بوجود نظرية حسابية أو مجموعة حقيقية واحدة، وأننا بدلاً من ذلك تُركنا مع تعدد الأنظمة التي لا يمكن القول بأن أيًا منها "أصدق" من غيرها.

(١٣) حيث قدمت فريند Friend دوافع تبني التعددية، منطلقة من عدة فلسفات رياضية معروفة (الواقعية والطبيعية، البنيوية، والشكلية). لقد استلهمت منهم ورفضت بعض ادعاءاتهم باعتبارها غير مبررة.

(١٤) تجادل مادي Maddy بأن التعددية الرياضية تتماشى مع التواضع المعرفي، مع الاعتراف بقيود المعرفة الإنسانية وإمكانية وجود وجهات نظر صالحة متعددة. قد تؤكد أنه لا يمكن لأي إطار رياضي واحد أن يدعي اليقين المطلق أو يشمل الحقيقة الرياضية بأكملها.

(١٥) يستكشف شابيرو مختلف الأنظمة والأطر التأسيسية، بما في ذلك نظرية المجموعات، نظرية الفئة، والرياضيات البناءة. ويناقش مزايا وقيود هذه الأساليب المختلفة ويؤكد على أهمية الاعتراف بتميزها وقيمتها. كما يأخذ عمل شابيرو في الاعتبار العلاقة بين الممارسة الرياضية واختيار الأنظمة أو الأطر التأسيسية. وهو يعترف بأن الممارسة الرياضية متنوعة وتشمل منهجيات مختلفة. يتماشى هذا مع المنظور التعددي بأن التقدم الرياضي يتضمن استكشاف ومقارنة وجهات نظر ومنهجيات مختلفة.

(١٦) على سبيل المثال، لم نتوقف عن ممارسة الحساب عندما اكتشف راسل المفارقة في اختزال فريجه للحساب إلى المنطق. وهذا دليل ايضًا ضد التفاهة.

(١٧) ما يُعد رياضيات ناجحة يتغير بمرور الوقت. عندما اكتشف جالوا Galois نظرية المجموعة في أوائل القرن التاسع عشر، كانت تعد "رياضيات من أجل الرياضيات فقط" ولا تنطبق على عالمنا المادي. ومع ذلك، يتم استخدام نظرية المجموعة اليوم في هواتفنا المحمولة والتكنولوجيا الحديثة. بعض النتائج الرياضية التي تبدو غير ذات أهمية قد يتبين بعد سنوات أنها الجزء المفقود من حل مشكلة رياضية أو بناء نظرية رياضية جديدة. لقد علمنا التاريخ مرارًا وتكرارًا ألا نتسرع في ما نعتبره رياضيات جديرة بالاهتمام. (Friend, M:2006, P.73)

(١٨) إن هذا الموقف تجاه استخدام مصطلحي "الجيد" و"السيء" يجسد المعيارية الناعمة التي يتبناها التعدديون. فمن خلال الدعوة إلى تحديد مصطلحي "الجيد" و"السيء" فإننا نضطر إلى أن نكون أكثر تحديداً، وبالتالي أكثر وضوحاً. إن فعل تحديد مصطلحات مثل "الجيد" ينزع فتيل المعيارية التي تتسم بها مثل هذه المصطلحات ويحولها إلى وصف .

(١٩) (بول بيناسيراف١٩٣١–)، فيلسوف أمريكي فرنسي المولد، يعمل في مجال فلسفة الرياضيات. ربما يكون بيناسيراف معروفًا بورقتيه البحثيتين:" ما لا تكون عليه الأرقام١٩٦٥" و "الحقيقة الرياضية ١٩٧٣"ومختاراته حول فلسفة الرياضيات، والتي شارك في تحريرها هيلاري بوتنام. https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Benacerraf

(٢٠) لا يجب أن تقتصر التعددية في المنهجية على المنهجيات الرياضية المستخدمة في السياقات الرياضية. إذا قبلنا أنه لا يوجد تمييز حاد بين الرياضيات والفلسفة، فيمكننا أيضًا أن نكون تعدديين تجاه المنهجيات الفلسفية وغيرها من المنهجيات العلمية، مثل تلك المستخدمة في علم الاجتماع وعلم النفس وعلم الأعصاب. يمكن لكل من هذه التخصصات إبلاغ كل من الفيلسوف وعالم الرياضيات. بحجة سابقة الشرط، أي أنه لا يوجد تمييز حاد بين الرياضيات والفلسفة، ضع في اعتبارك أولا أن العديد من علماء الرياضيات الجيدين هم أيضا فلاسفة، والعكس صحيح.(٢٠). (Friend,M:2014, P.26)

(٢١) هي أحكام تُستخدم عادةً في الحالات التي لا يوجد فيها قاعدة صريحة تنظم الموقف المعين.

(٢٢) يعتقد التعددي أنه ليس بالضرورة أن يكون هناك حل لجميع التناقضات (الظاهرية أو الأولية) بهذه الطريقة، أو حلها على الإطلاق. وهو لا يبدي أي رأي في هذه المسألة. وهذا ليس فقط لأسباب تتعلق بنقص المعرفة. فقد تكون لدينا جميع المعلومات الممكنة المتاحة، والتي تتعلق بـ α

ونفيها أو إنكارها، ولكن قد تكون هناك أسباب أخرى تجعل التناقض مستمرًا، أو حتى دائمًا. ولا يمكننا أن نلجأ إلى المنطق الذي يحظر التناقضات، لأن هذا من شأنه أن يثير التساؤل ضد المنطقي المتناقض. وهذا يعني، في ضوء الأنظمة المنطقية الشكلية الصارمة غير التافهة حيث توجد تناقضات يمكننا أن نستنتج منها بعض الصيغ، ولكن ليس كل الصيغ، أن الاحتجاج بقانون عدم التناقض باعتباره يحكم الأنظمة المنطقية الشكلية، هو ببساطة أمر خاطئ أو يثير التساؤل. (Friend, M:2014, P.119).

(٢٣) من السهل للغاية على فلاسفة الرياضيات أن يحصروا مهمتهم في تقديم وصف لـ "عالم الحقائق الرياضية". هذا المفهوم لمهمة فلسفة الرياضيات هو من بقايا أفلاطون التي يرفضها التعدديون.

(٢٤) يستمر كلا الموقفين في التطور بينما يستكشف الفلاسفة وجهات نظر وحلول بديلة لمعالجة المعضلات التي أثارتها معضلة بناسيراف Benacerraf، من الجدير بالملاحظة أن معضلة بيناسيراف تشغل معظم الاهتمامات في الدراسات داخل فلسفة الرياضيات.

(٢٥) هناك الكثير غير ذلك. ولكن حتى عند النظر إلى ثلاثة أنواع، يمكننا تكوين انطباع عن اتساع وتنوع التحقق المتبادل في الرياضيات. (Friend, M:2014, P.152).

(٢٦) الدافع وراء تسمية " المفارقة الخارجية" هو أن المفارقة تنشأ من النظر إلى نظرية غير تعددية. وعلى النقيض من ذلك، تنشأ "المفارقة الداخلية" من النظر إلى التعددية نفسها.

- متنوعة في مواد الكتب المدرسية.

المراجـــــــــع

- **Benacerraf, P(1965):** What Numbers Could Not Be ,The Philosophical Review Vol. (74), No(. 1), Published By: Duke University Press, pp. 47-73
- **Benacerraf, P. & H. Putnam (1983)**: Philosophy of Mathematics. Selected Readings. Second Edition, Cambridge University Press.
- **Bohm, D (1980):** Wholeness and the implicate order. London: Routledge.
- **Bourbaki, N(2004):Elements of Mathematics" Theory of Sets", Springer**
- **Byers, William (2007):** How Mathematicians Think: Using Ambiguity, Contradiction, and Paradox to Create Mathematics, Princeton University Press.
- **Davies, E,B(2005):** A Defence of Mathematical Pluralism, Philosophia Mathematica, PP (1-20),

  https://philsci-archive.pitt.edu/1681/1/pluralism16.pdf
- **Friend, Michele (2013a**): Embracing the Crisis in the Foundations of Mathematics, Les Cahiers d'Ithaque, pp (27-43). https://hdl.handle.net/1866/13334.
- ---------- **(2013b**):Pluralism and "Bad" Mathematical Theories: Challenging our Prejudices, in: Paraconsistency: Logic and Applications, Editors: Koji Tanaka, Francesco Berto (eds), Logic, Epistemology, and the Unity of Science, Volume(26), Springer Dordrecht, pp(277-307)
- ---------- **(2014):** Pluralism in Mathematics: New Position in Philosophy of Mathematics, 1st ed. Logic, Epistemology, and the Unity of Science, volume (32), Springer Dordrecht, https://doi.org/10.1007/978-94-007-7058-4.
- ----------**(2019):** Varieties of Pluralism and Objectivity in Mathematics, In: Stefania,C , Deborah.K& Denizm S: Reflections on the Foundations of Mathematics, Univalent Foundations, Set Theory and General Thoughts, (Synthese Library) 1st ed, pp(345-362).
- **Grim,P (2004)**: What is a Contradiction, In, Priest, G& Beall, JC (eds): The Law of Non-Contradiction" New Philosophical Essays", Oxford University Press Inc., New York.pp(49-72)
- **Hersh, R (2017):** Pluralism as modeling and as confusion. In Humanizing mathematics and its philosophy, Essays Celebrating the 90th Birthday of Reuben Hersh pages 19–29. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-61231-7.

- **Lakatos, I (1976):** Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery. Cambridge: Cambridge University Press.
- **Maddy, P (1997):** Naturalism in mathematics. Oxford: Clarendon Press.
- **Mortensen, C (1995):** Inconsistent mathematics (Mathematics and its applications312). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

  DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-015-8453-1
- **Priest, G(2013**): Mathematical Pluralism, Logic Journal of the IGPL, Volume(21), Issue(1), p 4-13, https://doi.org/10.1093/jigpal/jzs018.
- ----------**(2019):** From the Foundations of Mathematics to Mathematical Pluralism" Univalent Foundations, Set Theory and General Thoughts",In: Stefania,C , Deborah.K& Denizm S,: Reflections on the Foundations of Mathematics ,Synthese Library Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science Volume 407, pp (363-380), https://doi.org/10.1007/978-3-030-15655-8.
- ---------- **(2024):** Mathematical Pluralism, Series: Elements in the Philosophy of Mathematics, Cambridge University Press, https://doi.org/10.1017/9781009091640.
- **utnam, H (1967):** Mathematics without Foundations, The Journal of Philosophy. Vol. 64, No. 1, pp. (5-22). https://doi.org/10.2307/2024603.
- **Shapiro, S (2000**): Thinking about mathematics, Philosophy of mathematics, Oxford: Oxford University Press.
- ----------**(**2014):Varieties of Logic, Oxford and New York: Oxford University Press.
- **Singh, S (1997**): Fermat's enigma: The epic quest to solve the world's greatest mathematical problem. New York: Penguin Books.
- **Vopěnka, P**(1979): Mathematics in the alternative set theory. Leipzig: Teubner-texte zur Mathematik.
- **Wagner, R (2019**): Does Mathematics Need Foundations?, in: Centrone,S. Kant, D.(eds) Reflections on the Foundations of Mathematics, Synthese Library, Vol407. Springer, Cham, https://doi.org/10.1007/978-3-030-15655-8, pp(381-396).
- **Wittgenstein, L. (1976):** Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics, Cambridge, 1939, Edited by Cora Diamond, Chicago: University of Chicago Press.